

Cours d'optique géométrique et ondulatoire

Partie I – Optique géométrique

Notion de rayon lumineux

Réflexion – Réfraction

Formation des images

Lentilles minces

Miroirs sphériques

Traitement matriciel

Photométrie

Partie II - Optique ondulatoire

Diffraction

Réseaux plans en optique

Interférence à 2 ondes

Cohérence

Les parties en taille réduite sont à regarder en seconde lecture.

Notion de rayon lumineux

L'optique est une science dont les fondements ont été établis avant le XX siècle. Depuis le début du siècle, la révolution de la mécanique quantique, et par conséquent de la nature quantique de la lumière a profondément modifié notre façon d'apprécier les phénomènes. Néanmoins, les principes déjà établis n'ont pas été pour autant obsolètes, cette nouvelle vision a simplement permis de préciser les concepts et d'indiquer les limites de validités. L'optique, branche actuelle de l'électromagnétisme, s'est développée difficilement, les applications (systèmes catadioptriques, comprend des lentilles et des miroirs, système catoptriques comprenant seulement des miroirs et système dioptrique à base de lentilles) ont été en avance sur la compréhension de la nature de la lumière.

Les fausses pistes ont été très nombreuses. L'optique géométrique est une discipline très ancienne dont certaines lois fondamentales – comme les lois de la réflexion de la lumière – étaient connues des philosophes et mathématiciens grecques comme Empédocles (490-430 avant J.C.), Euclide (300 avant J.C.) ou de leurs disciples. Or ces lois découlent des propriétés de propagation des ondes électromagnétiques dans la matière. L'optique géométrique n'est pas une branche isolée de la physique, c'est une partie intégrante de l'électromagnétisme basée sur quelques approximations.

Plusieurs difficultés ont troublé les esprits au cours des derniers siècles : la nature du photon, qui n'est pas une simple particule, mais le vecteur d'interaction du champ électromagnétique. Ce photon a tantôt un comportement plutôt ondulatoire, tantôt un comportement plutôt corpusculaire. La longueur d'onde de la lumière, le rayonnement visible est compris entre 0,4 et 0,8 μm rend les analogies avec les ondes à la surface de l'eau, par exemple, très délicates : derrière un obstacle, nous observons avec le soleil une ombre projetée et aucunement une quelconque figure d'interférence ou de diffraction. Derrière un pilier, l'onde provenant d'un caillou jeté dans l'eau par exemple donne un résultat bien différent. Une autre difficulté est liée au support de l'onde, l'homme inventa l'éther pour pallier son incompréhension, en fait, le photon se propage dans le vide alors qu'une onde de surface a besoin d'un support matériel. Nous allons débiter ce cours par les dates importantes dans le développement de l'optique.

I – Les grandes dates

- Lippershey 1587-1619 : télescope par réfraction
- Lois de Snell (1621, non rendues publiques) -Descartes (1637) : réflexion et réfraction pour une onde plane incidente sur un dioptre (surface de séparation entre deux milieux).
- Principe de Fermat 1657 : un rayon lumineux entre 2 points est stationnaire.
- Hooke 1665 : aspect ondulatoire
- Newton 1666 : la lumière blanche peut être décomposée, notion de couleur
- Römer 1675 : vitesse finie de la lumière (éclipse d'Io, un satellite de Jupiter)
- Principe d'Huygens 1678 : tout point de l'espace se comporte comme une source d'ondes secondaires. Notion de polarisation et d'onde transverse de la lumière.
- Diffraction par Young 1803 : nature ondulatoire de la lumière
- Théorème de Malus 1808 : les rayons lumineux sont normaux aux surfaces d'ondes.
- Fresnel 1818 : synthèse des travaux sur la nature ondulatoire, 1821 : origine de la dispersion
- Maxwell 1876 : la lumière est une onde électromagnétique qui vibre à une fréquence de $5 \cdot 10^{14}$ Hz et se propage dans le vide à la vitesse $c=3 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$.
- Planck 1900 : rayonnement du corps noir, la couleur d'un corps chauffé est une indication de sa température
- Einstein 1905 : le photon est une particule

II – Propriétés des rayons lumineux de l'optique géométrique

1 – Grandeurs caractéristiques

a – Indice

Par définition, l'indice n d'un milieu est le rapport entre la vitesse de la lumière dans le vide et la vitesse de la lumière dans le milieu.

$$n = \frac{c}{v}$$

L'indice dépend de la longueur d'onde pour tous les corps. On caractérise cette propriété par la dispersion $dn/d\lambda$, où λ est la longueur d'onde. Sans autre indication, l'indice n est l'indice moyen dans le visible. Dans l'eau, $n=1,33$, dans le verre $n=1,5$.

Remarque : l'indice est aussi dénommé indice de réfraction.

b – Chemin optique

Pour une courbe (C) allant de A à B, qui n'est pas en général un rayon lumineux, on appelle chemin optique la quantité L :

$$L = \int_{A(C)}^B n ds$$

Où ds est l'abscisse curviligne.

c – Principe de Fermat

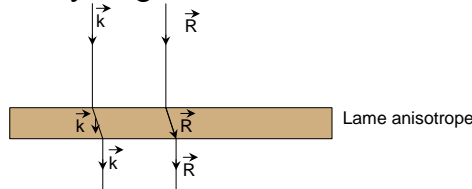
Il est important d'introduire ici le principe de Fermat (1650) :

Pour une courbe C - qui n'est pas en général un rayon lumineux – allant de A à B, on appelle chemin optique la quantité L. Le chemin optique de la courbe parcourue par un rayon lumineux est stationnaire (mais pas forcément minimum) par comparaison avec les chemins optiques des courbes infiniment voisines ayant les mêmes extrémités.

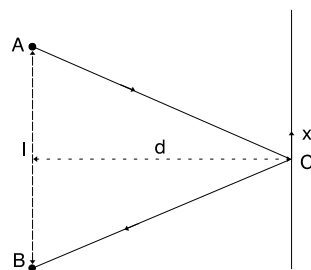
Dans le cas d'un rayon lumineux, le chemin optique correspond à l'intégrale suivant le chemin effectivement suivi par la lumière (c'est-à-dire les lignes de champ du vecteur de Poynting) :

$$L = \int_A^B n ds = \int_A^B n \vec{u} \cdot \vec{ds}$$

Il faut être prudent pour une interprétation plus poussée du chemin optique. Dans les cas extrêmes, on suit le vecteur de Poynting.



Exemple d'application du principe de Fermat : loi de la réflexion



Soit x l'écart à la position centrale. Montrons que le principe de Fermat conduit à $x=0$. Le chemin optique vaut :

$$L(AB)=L(AC)+L(CB)$$

$$L(AC) = \left[\left(\frac{l}{2} - x \right)^2 + d^2 \right]^{1/2}$$

$dL(AB)/dx=0$ conduit à $l/2-x=l/2+x$ soit encore $x=0$.

d – Grandeurs caractéristiques

Considérons une onde plane scalaire propagative monochromatique, elle s'écrit :

$$Ae^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

ω est la pulsation ou fréquence angulaire. Son unité est le rad.s^{-1}

\vec{k} est le vecteur d'onde, en m^{-1}

T est la période, on l'obtient à partir de $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Elle s'exprime en seconde.

λ est la longueur d'onde, en m. On l'obtient à partir de la relation $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

Dans un milieu d'indice n, la fréquence, reste bien sûre inchangée ; il n'en est pas de même pour la longueur d'onde : $\lambda = \frac{\lambda_{\text{vide}}}{n}$. La vitesse de la lumière est réduite, l'oscillation a lieu sur une distance réduite.

A partir de l'équation de propagation, on a :

$$v_{\text{propagation}} = \frac{c}{n} = \frac{\omega}{k}$$

Il est important de connaître les couleurs associées aux longueurs. Voici quelques raies laser usuelles qui permettent de garder une référence :

0,364 μm UV invisible	0,574 μm jaune
0,407 μm violet	0,590 μm jaune
0,488 μm bleu	0,620 μm orange
0,514 μm vert	0,647 μm rouge
0,530 μm vert	0,790 μm rouge difficilement discernable

L'œil contient des cônes sensibles à la couleur (rouge, vert, jaune) et des bâtonnets sensibles à l'éclairement. Nous voyons la couleur jaune pour une lumière monochromatique jaune mais aussi pour une lumière polychromatique constituée de vert et de rouge.

2 – Surface d'onde – théorème de Malus

Lorsque l'on étudie la propagation du champ électrique à partir des équations de Maxwell, les milieux à indices variables posent des problèmes de résolution. On est amené à décomposer le champ électrique en 3 facteurs :

$$\vec{E}(\vec{r}, \omega) = \vec{E}_0(\vec{r}, \omega) e^{ik_0 S(\vec{r}, \omega)} e^{-i\omega t}$$

avec E_0 est une amplitude et $k_0 S$ une phase. L'approximation fondamentale de l'optique géométrique est de supposer que toutes les variations des grandeurs sont très lentes à l'échelle de λ_0 (10^{-7}m). On retrouve alors pour \vec{E} une structure d'onde plane. Ainsi, on obtient alors une équation pour S (qui vaut $n(\omega)\vec{u} \cdot \vec{r}$ pour une onde plane) :

$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{\text{grad}}(S)}{n}$$

\vec{u} est orthogonal à la surface S, qui peut maintenant s'interpréter comme l'équation de la surface d'onde. Toujours dans le cadre de la théorie électromagnétique, \vec{u} est le vecteur unitaire porté par le vecteur de Poynting : $\langle \vec{R} \rangle = \frac{c}{n} \langle w_{em} \rangle \vec{u}$.

Comme S est la surface d'onde, on a :

$$dS = d\vec{r} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(S) = ds \vec{u} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(S) = n(r) ds$$

où ds est l'abscisse curviligne vue en mécanique.

Cette approche est à mettre en parallèle avec le théorème de Malus (1808) :
Les rayons lumineux sont les trajectoires orthogonales aux surfaces d'onde.

3 – Rayons lumineux

Les rayons lumineux sont les lignes tangentes au vecteur de Poynting $\langle \vec{R} \rangle$ en tout point (transport de l'énergie). Il possède les propriétés suivantes : ce sont des courbes, indépendantes de la polarisation et de la pulsation (si on néglige la dispersion), connues uniquement avec la géométrie $n(\vec{r})$ du milieu et des conditions initiales du rayon, sans qu'intervienne la nature ondulatoire de la lumière. Ces rayons sont bien sûrs orthogonaux aux surfaces d'onde.

4 – Diffraction

Dès qu'il y a un obstacle, comme un trou de rayon a , l'onde caractérisée par une longueur d'onde λ interagit avec les charges composant la matière de cet obstacle. L'éparpillement de la lumière qui en résulte est le phénomène de diffraction. Il a de l'importance quand la distance d'observation n'est pas négligeable devant la longueur de Rayleigh $\pi a^2/\lambda$ (nous verrons ceci dans le cadre de l'optique ondulatoire). Pour un trou de rayon 1 cm, nous avons sensiblement l'image projetée jusqu'à une distance inférieure à 100m, c'est-à-dire dans la région Fresnel. Ces notions sont très importantes dans la théorie des antennes et sont très largement abordées.

III – Propagation en milieux inhomogènes

1 – Equation iconale

Evaluons la variation élémentaire de $(n\vec{u})$ en fonction de l'abscisse curviligne ds :

$$\frac{d}{ds}[n\vec{u}] = \frac{d}{ds}[\overrightarrow{\text{grad}}(S)] = \overrightarrow{\text{grad}}(\overrightarrow{\text{grad}}(S)) \frac{d\vec{r}}{ds} = \overrightarrow{\text{grad}}(\overrightarrow{\text{grad}}(S))\vec{u} = \overrightarrow{\text{grad}}(\overrightarrow{\text{grad}}(S)) \frac{\overrightarrow{\text{grad}}(S)}{n}$$

A partir de la relation issue de l'analyse vectorielle (vue en mécanique des fluides) :

$$\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{v}) = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{v^2}{2}\right) - \vec{v} \times \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v})$$

Et comme :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}}(\varphi)) = 0$$

On trouve :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(\overrightarrow{\text{grad}}(S))\overrightarrow{\text{grad}}(S) = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{(\overrightarrow{\text{grad}}(S))^2}{2}\right) = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{n^2}{2}\right)$$

Sachant que d'après l'analyse vectorielle :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{n^2}{2}\right) = n \overrightarrow{\text{grad}}(n)$$

Ce qui conduit à :

$$\frac{d}{ds}[n\vec{u}] = \overrightarrow{\text{grad}}(n)$$

C'est l'équation vectorielle donnant la trajectoire d'un rayon lumineux. C'est l'équation fondamentale de l'optique géométrique.

2 – Orientation de la courbure

En développant selon les coordonnées intrinsèques, $\frac{d\vec{u}}{ds} = \frac{\vec{e}_N}{R}$ avec R rayon de courbure et \vec{e}_N la normale à la trajectoire, on obtient :

$$\frac{dn}{ds}\vec{u} + n \frac{\vec{e}_N}{R} = \overrightarrow{\text{grad}}(n)$$

En multipliant scalairement avec \vec{e}_N , on obtient l'expression de la courbure de trajectoire :

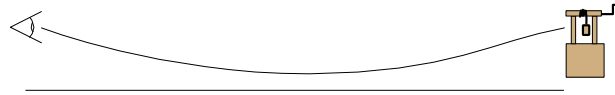
$$\frac{1}{R} = \frac{1}{n} \overrightarrow{\text{grad}}(n) \cdot \vec{e}_N$$

R est toujours positif par construction (la base peut ne pas être directe, ce qui la différence du repère de Frénet), $\overrightarrow{\text{grad}}(n)$ est orienté selon \vec{e}_N , qui pointe donc vers les forts indices.

3 – Applications

a – mirages

Sous l'effet de la chaleur, l'indice de l'air, proche mais supérieur à 1 (environ 1.0003) diminue :



Les rayons s'incurvent et semblent provenir du sol comme s'il y avait réflexion.

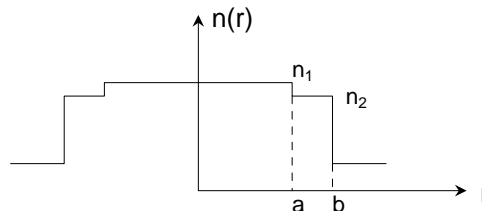
b – fibres optiques à gradient d'indice

Il existe des fibres à saut d'indice et des fibres à gradient d'indice. L'ouverture numérique (O.N.), comprise entre 0 et 1, et qui caractérise ses fibres, est égale à :

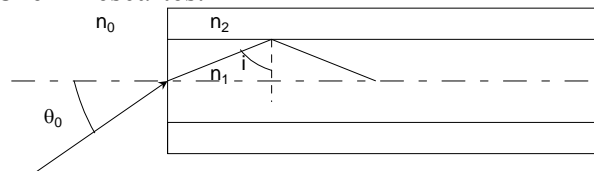
$$O.N. = \sin(\theta_0)$$

Pour $\theta < \theta_0$, angle maximum d'acceptance, le rayon lumineux se propage dans la fibre.

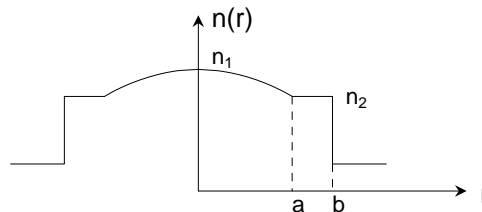
Considérons dans un premier temps les fibres à saut d'indice dont le profil en r est donné ci dessous :



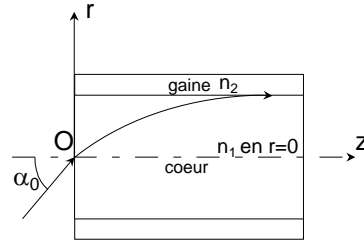
La trajectoire est une succession de droites. Nous pourrions déterminer l'O.N. dès que nous connaîtrons les lois de Snell-Descartes.



Dans le cas des fibres à gradient d'indice, le profil est le suivant :



Et la trajectoire est régie par une équation du second ordre du type : $\frac{d^2x}{dz^2} + \frac{x}{\rho^2} = 0$ où ρ dépend des caractéristiques de la fibre.

Exercice 1 : Fibre optique à gradient d'indice

Dans les fibres optiques à gradient d'indice, l'indice diminue de façon continue de la valeur n_1 sur l'axe optique à la valeur n_2 lorsqu'on s'éloigne de l'axe. Supposons un profil parabolique, l'indice $n(r)$ suit la loi suivante :

$$n(r) = n_1 \left(1 - \Delta \frac{r^2}{a^2} \right) \text{ avec } \Delta = \frac{n_1 - n_2}{n_1} \approx 0,01$$

L'opérateur gradient s'exprime en coordonnées cylindriques selon : $\vec{grad} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ r \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$

- 1 – Quel est l'indice le plus fort, justifiez votre réponse.
- 2 – Tous les rayons passent-ils par l'axe optique si en $z=0$, ils passent par O ? On analysera le cas des angles très petits et très grands.
- 3 - En utilisant l'équation iconale, trouvez la trajectoire d'un rayon lumineux incliné d'un angle α (que l'on considérera comme très inférieur à 1) avec l'axe optique (Oz) et coupant celui ci au bout d'une distance d que l'on déterminera.
- 4 – Représentez plusieurs rayons associés à des angles d'entrée petits.

Réflexion – Réfraction

I – Changement de milieu

1 – Définition du dioptré

Le dioptré est la surface de séparation entre 2 milieux homogènes d'indice n_1 et n_2 . Nous supposons que les aspérités de la surface sont très petites devant la longueur d'onde du rayon lumineux, et qu'en conséquence, la surface est parfaite (non diffusante ni diffractante).

2 – Etude de $n(\lambda)$

L'indice $n(\lambda)$ dépend de la longueur d'onde. Dans tout matériau, il y a des plages d'absorption et des plages de transparence. Par exemple, le verre est transparent dans le visible, opaque dans l'infrarouge. Le silicium est quant-à lui utilisé pour l'optique infrarouge des militaires, en effet, il est transparent dans l'infrarouge et opaque dans le visible. En général, il est possible de mettre l'indice sous la forme d'un développement en puissance de λ^2 et λ^{-2} .

3 – Lois de Snell-Descartes

Première loi de Snell-Descartes:

- Le rayon réfléchi et le rayon réfracté sont dans le plan d'incidence.

Deuxième loi de Snell-Descartes (loi de la réflexion):

- L'angle de réflexion i'_1 est égal à l'angle d'incidence i_1 .

Troisième loi de Snell-Descartes (loi de la réfraction):

- Le produit de l'indice du premier milieu avec le sinus de l'angle d'incidence est égal au produit de l'indice du second milieu avec le sinus de l'angle de réfraction :

$$n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2)$$

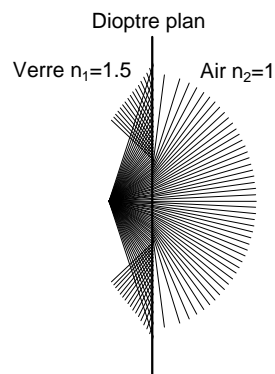
si le rayon transmis existe.

Remarque : dans le cas où le deuxième milieu est moins réfringent que le milieu incident, il existe un angle limite $i_{1\max}$ pour lequel le rayon réfracté s'écarte de la normale d'un angle i_2 égal à $\pi/2$, tel que :

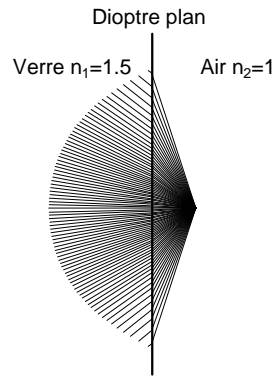
$$\sin(i_{2\max}) = \frac{n_1}{n_2} \sin(i_{1\max}) = 1 \text{ soit } i_{1\max} = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$$

Si l'angle est supérieur à l'angle limite, le rayon transmis n'existe pas.

Dans le cas du verre, $i_{1\max} = 41,8^\circ$, et l'on obtient pour une source recouverte de verre le schéma suivant :



Pour la configuration inversée, il n'y a évidemment pas d'angle limite :



Seul le rayon le plus intense est tracé.

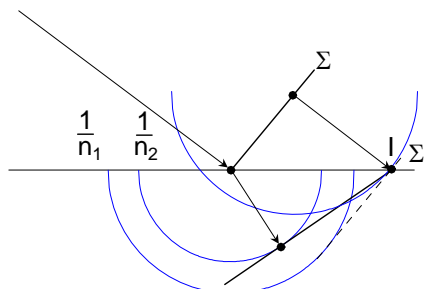
4 – Construction de Huygens et de Snell Descartes du rayon réfracté

a – Enoncer du principe de Huygens

La lumière se propage de proche en proche. Chaque point atteint par la lumière se comporte comme une source secondaire qui émet des ondelettes sphériques dans un milieu isotrope. La surface enveloppe de ces ondelettes forme une nouvelle surface d'onde.

b- Construction de Huygens

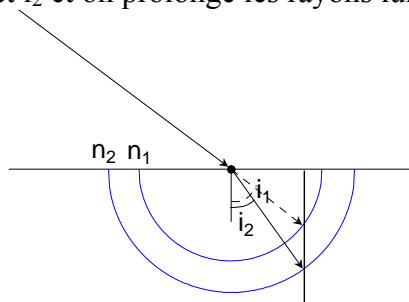
On considère une surface d'onde Σ . Pour chaque point de cette surface, on trace une sphère de rayon ct/n_1 , c'est-à-dire du rayon équivalent au chemin optique. Lors d'un changement de milieu, le nouveau rayon de la sphère devient ct/n_2 . La surface Σ se transforme alors en surface Σ' .



Généralement, on ne représente qu'un seul rayon, qu'on prolonge jusqu'à la sphère $1/n_1$, ensuite, on trace la tangente à cette sphère, on détermine l'intersection I et l'on trace la tangente à la sphère $1/n_2$ passant par I.

c – Construction à partir de loi de Snell-Descartes

On trace maintenant deux sphères de rayon n_1 et n_2 . Ensuite, on se sert de la projection sur le côté opposé à l'angle i_1 et i_2 et on prolonge les rayons lumineux.

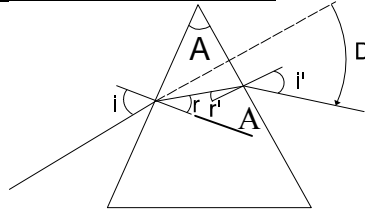


5 – Et l'éclairement ?

Il faut faire appel aux équations de Maxwell pour répondre à cette question. Cela ne fait pas parti du cadre de ce cours. Nous retiendrons juste qu'en réflexion normale air-verre : $I_R = (1-n)^2 / (1+n)^2 I_I$, et par conservation de l'énergie $I_T = I_I - I_R$. A la traversée de 2 dioptries plans propres, nous perdons avec $n=1,5$ (cas d'une lame de verre), 8% de l'éclairement du faisceau incident, ce qui est relativement faible.

II - Etude du prisme dispersif

1 - Formule du prisme : déviation du rayon incident



Soit un prisme d'angle A , les relations de Snell-Descartes permettent d'écrire les relations suivantes :

$$\sin(i) = n \sin(r) \quad (1)$$

$$\sin(i') = n \sin(r') \quad (2)$$

$$r + r' = A \quad (3)$$

$$D = i - r + i' - r' = i + i' - A \quad (4)$$

En ce qui concerne les signes des angles, ils sont ici pris tous positifs, ce qui correspond aux cas les plus courants.

Il y a plusieurs points qui sont à étudier dans le cas du prisme :

- variation de la déviation avec l'angle du prisme A
- condition d'émergence d'un rayon
- minimum de déviation

Pour cela, on différencie les 4 formules du prisme :

$$\cos(i) di = n \cos(r) dr + dn \sin(r)$$

$$\cos(i') di' = n \cos(r') dr' + dn \sin(r')$$

$$dA = dr + dr'$$

$$dD = di + di' - dA$$

A partir de la première relation, exprimons dr :

$$dr = \frac{\cos(i)}{n \cos(r)} di - \frac{\sin(r)}{n \cos(r)} dn$$

A partir de la troisième relation, exprimons dr' :

$$dr' = dA - dr$$

A partir de la deuxième relation, exprimons di' :

$$di' = \frac{n \cos(r')}{\cos(i')} (dr') + \frac{\sin(r')}{\cos(i')} dn$$

puis en remplaçant dr'

$$di' = \frac{n \cos(r')}{\cos(i')} (dA - dr) + \frac{\sin(r')}{\cos(i')} dn$$

puis en remplaçant dr

$$di' = \frac{n \cos(r')}{\cos(i')} dA - \frac{n \cos(r')}{\cos(i')} \left(\frac{\cos(i)}{n \cos(r)} di - \frac{\sin(r)}{n \cos(r)} dn \right) + \frac{\sin(r')}{\cos(i')} dn$$

$$di' = - \frac{\cos(r') \cos(i)}{\cos(i') \cos(r)} di + \frac{n \cos(r')}{\cos(i')} dA + \left[\frac{\sin(r') \cos(r)}{\cos(i') \cos(r)} + \frac{\sin(r) \cos(r')}{\cos(r) \cos(i')} \right] dn$$

comme $\sin(r') \cos(r) + \sin(r) \cos(r') = \sin(r+r') = \sin(A)$, on obtient finalement :

$$di' = - \frac{\cos(r') \cos(i)}{\cos(i') \cos(r)} di + \frac{n \cos(r')}{\cos(i')} dA + \left[\frac{\sin(A)}{\cos(i') \cos(r)} \right] dn$$

En injectant cette relation dans la quatrième relation du prisme :

$$dD = \left[1 - \frac{\cos(i) \cos(r')}{\cos(i') \cos(r)} \right] di + \left[\frac{\sin(A)}{\cos(i') \cos(r)} \right] dn + \left[n \frac{\cos(r')}{\cos(i')} - 1 \right] dA$$

Il suffit d'identifier ensuite dD aux dérivées partielles :

$$dD = \left[1 - \frac{\cos(i) \cos(r')}{\cos(i') \cos(r)} \right] di + \left[\frac{\sin(A)}{\cos(i') \cos(r)} \right] dn + \left[n \frac{\cos(r')}{\cos(i')} - 1 \right] dA = \frac{\partial D}{\partial i} di + \frac{\partial D}{\partial n} dn + \frac{\partial D}{\partial A} dA$$

2 – Etude de la déviation

a – Variation de la déviation avec l'angle du prisme

D'après notre précédent calcul,

$$\frac{\partial D}{\partial A} = n \frac{\cos(r')}{\cos(i')} - 1$$

Si l'indice de réfraction est supérieur à 1, l'angle i' est toujours supérieur à l'angle r' , et par conséquent, $\cos(r')/\cos(i')$ est toujours supérieur à 1. $\partial D/\partial A$ est donc toujours positif :

La déviation est une fonction croissante de l'angle du prisme, autrement dit, la déviation se fait vers la base du prisme.

b – Variation de la déviation avec l'indice du prisme

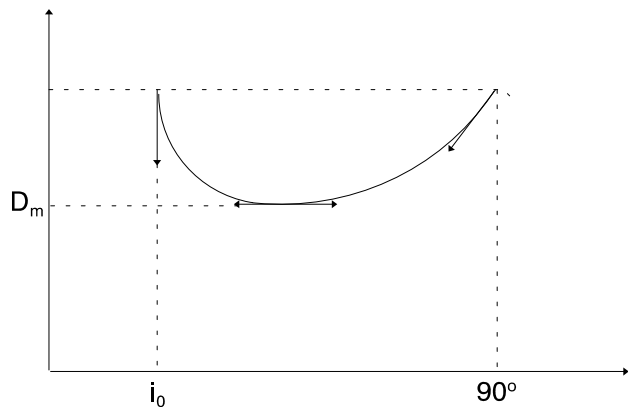
$$\frac{\partial D}{\partial n} = \frac{\sin(A)}{\cos(i') \cos(r')}$$

L'angle i' et r' sont toujours compris entre -90° et 90° . La dérivée partielle de D par rapport à n est donc positive et la déviation est une fonction croissante de l'indice du prisme. Dans la plupart des matériaux, l'indice diminue quand la longueur d'onde augmente (dispersion dite normale). Le prisme va donc dévier la lumière bleue plus fortement que la lumière rouge.

c – Variation de la déviation avec l'angle d'incidence

$$\frac{\partial D}{\partial i} = 1 - \frac{\cos(i) \cos(r')}{\cos(i') \cos(r')}$$

La représentation de $D(i)$ permet d'analyser les comportements en incidence rasante ($i=90^\circ$), en émergence rasante (i_0) et au minimum de déviation D_m . Si l'angle est plus petit que i_0 , alors la trajectoire du rayon lumineux dans le prisme ne correspond pas à ce que l'on vient de tracer car apparaît une réflexion totale.



Par trouver le minimum de déviation, exprimons cette quantité en fonction des sinus :

$$\frac{\partial D}{\partial i} = 1 - \sqrt{\frac{(1 - \sin^2(i))(n^2 - \sin^2(i'))}{(1 - \sin^2(i'))(n^2 - \sin^2(i))}}$$

Le second terme vaut 1 pour $i=i'$ donc au minimum de déviation, on a $r=r'=A/2$, d'où $D_m=2i_m-A$.

La relation :

$$\sin\left(\frac{A + D_m}{2}\right) = n \sin\left(\frac{A}{2}\right)$$

est très importante car elle permet de déterminer l'indice n avec une grande précision (10^{-6}).

Remarque utile pour déterminer la focale d'une lentille :

Lorsque l'angle A est petit et les valeurs de i éloignées de 90° , on peut écrire :

$$D \approx i + i' - A = nr + nr' - A = (n - 1)A$$

Dans cette approximation, la déviation est pratiquement constante et indépendante de i .

d - Pouvoir dispersif

Le pouvoir dispersif K d'un verre est défini par :

$$K = \frac{n_F - n_C}{n_D - 1}$$

avec n_F , n_C et n_D correspondant aux indices à $\lambda = 486,1$; $656,3$, et $589,3$ nm.

Le nombre d'Abbe est défini par :

$$v_d = \frac{1}{K}$$

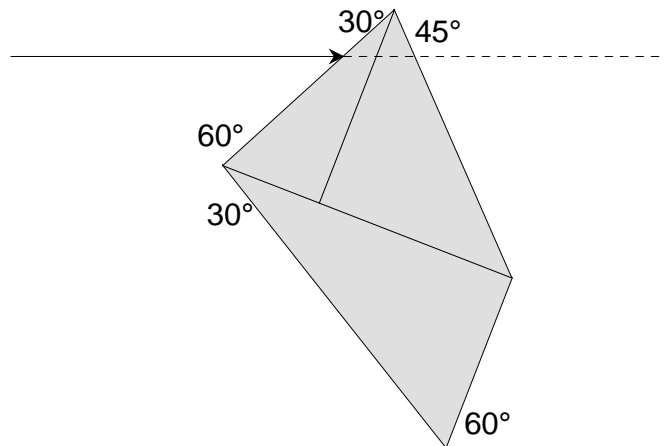
Plus un verre est dispersif, plus le nombre d'Abbe est faible; il varie de 64 (verre légers) à 30 (verres lourds).

La dispersion angulaire vaut qu'en à elle :

$$\delta D_m = D_F - D_C$$

Lorsque le prisme est utilisé au minimum de déviation, δD_m est de l'ordre de 1° .

Exercice 2 : prisme de Pellin-Broca



1 - A partir des lois de l'optique géométrique, reproduire le dessin et prolonger le tracer du rayon lumineux à l'intérieur du prisme pour un angle d'incidence à $48,6^\circ$. L'indice du prisme sera pris égal à 1,5 pour la longueur d'onde utilisée.

2 - Quelles sont les lois de ce prisme ?

3 - Avec le même angle d'incidence, que vaut la déviation du rayon lumineux pour un indice $n = 1,5 + \delta n$ (qui correspondrait à une couleur différente) ?

4 - Comparer la dispersion de ce type de prisme ($dD/d\lambda$) avec un prisme d'angle $A = 60^\circ$ au minimum de déviation composé du même matériau. Quel est l'avantage d'utiliser un prisme de Pellin-Broca ?

Formation des images

Comme convention de signe, nous prendrons le sens positif égal au sens de propagation de la lumière.

I - Stigmatisme

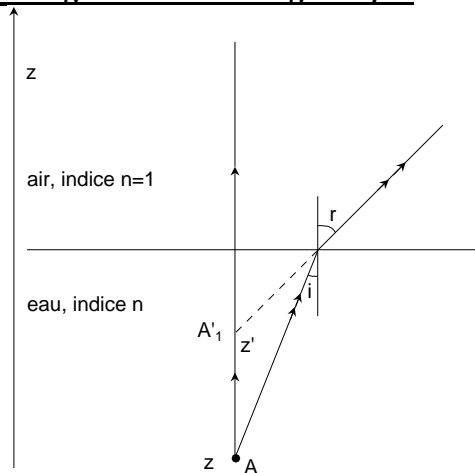
1 - Définition du stigmatisme rigoureux

Un système optique est rigoureusement stigmatique pour un couple de points A et A' si tous les rayons issus de A se coupent en A' après traversée du système optique. A' est alors l'image parfaite de l'objet A par le système optique, et vice versa si l'on inverse le sens de propagation de la lumière ; on dit alors que A et A' sont conjugués par ce système.

Remarque : la dimension du système optique conduit à de la diffraction, qui peut aussi s'interpréter comme la perte des hautes fréquences spatiales associées aux petits détails, « parfait » s'entend donc à cette limitation près.

En termes de chemin optique, quelque soit le rayon optique retenu, le chemin optique est stationnaire : $L(AA') = \text{constante}$. Le stigmatisme rigoureux signifie aussi que l'on transforme une onde plane (infini) en une onde plane ou une onde sphérique en une onde sphérique.

2 - Exemple d'un système non rigoureusement stigmatique



Considérons un dioptré plan séparant l'air d'indice 1 de l'eau d'indice 1,3. Considérons l'objet A ponctuel à une distance finie de ce dioptré et cherchons son image à travers ce dioptré. Pour ce faire, nous tracerons plusieurs rayons lumineux passant par A et traversant le dioptré. Le premier rayon est celui passant orthogonalement au dioptré, qui a donc un angle d'incidence nul par rapport à celui-ci. D'après les lois de Snell Descartes, ce rayon se prolonge sans déviation. Calculons maintenant l'intersection d'un rayon incliné de l'angle i avec le premier rayon :

$$z' = z \frac{\tan(i)}{\tan(r)} = z \frac{1 - n^2 \sin^2(i)}{n \sqrt{1 - \sin^2(i)}}$$

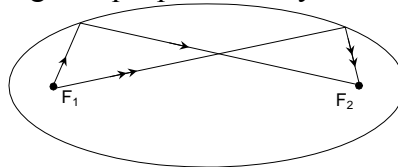
Cette distance est fonction de l'angle d'incidence. On remarque que A'1 se rapproche du dioptré lorsque l'angle i augmente. Si i tend vers zéro, $z' = z/n$, correspondant à un stigmatisme approché pour les petits angles. Si i tend vers une valeur telle que $n \cdot \sin(i)$ tend vers un, z' tend vers zéro. Il n'existe pas un point rigoureusement conjugué au point A. Cet exemple montre que l'aberration augmente avec l'angle d'incidence. Cette observation

généralisable nous conduira par la suite à nous intéresser aux rayons ayant une incidence faible par rapport à l'axe optique pour avoir un stigmatisme approché.

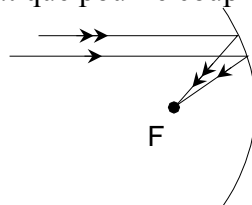
3 – Exemples de systèmes rigoureusement stigmatiques

Bien que la majorité des systèmes optiques soient non rigoureusement stigmatiques, il existe cependant quelques cas particuliers très utiles qui remplissent la condition de stigmatisme rigoureux pour des couples de points conjugués.

- Le miroir plan est stigmatique pour tous les points
- Le miroir sphérique est stigmatique pour son centre de courbure (montage 4f) ; il en est de même pour le centre du miroir.
- Le miroir elliptique est stigmatique pour ses foyers.



- le miroir parabolique est stigmatique pour le couple de points infini-foyer.



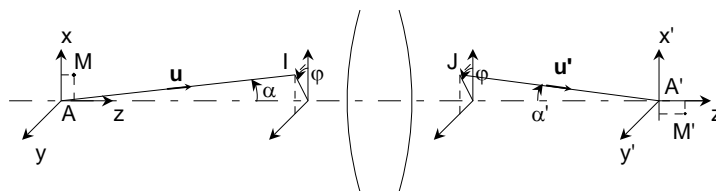
II – Stigmatisme approché

Nous venons de voir que le stigmatisme rigoureux est possible pour généralement un couple de points conjugués, ce qui rend la formation d'une image étendue hors de ce cadre. En fait, la diffraction ou la taille du détecteur assouplisse nos exigences, il est donc nécessaire de se fixer de nouveaux critères, adaptés à la qualité optique que nous désirons, pour poursuivre ce chapitre : ce sont les conditions de stigmatisme approché.

Le stigmatisme approché concerne des systèmes déjà rigoureusement stigmatiques pour un couple de points particuliers. Il s'agit de chercher les conditions pour lesquelles un tel système restera stigmatique pour des points très voisins des points idéaux, quelle que soit l'inclinaison des rayons.

La manière la plus radicale de rendre un système stigmatique est de se limiter à l'approximation des petits angles pour des objets de petite taille. C'est l'approximation de Gauss qui sera traitée dans la partie IV.

Nous nous proposons de systèmes optiques centrés, c'est à dire ceux présentant une symétrie de révolution autour d'un axe optique.



On considère le système rigoureusement stigmatique pour le couple de points A et A'. Cherchons la condition pour que les deux points M et M' vérifient la condition de stigmatisme.

n et n' sont les indices des milieux objet et image. \vec{u} et \vec{u}' sont les vecteurs unitaires associés aux rayons incidents et émergents. L'angle φ , du fait de la symétrie de révolution est le même en I et J. Il n'en est pas de même pour l'angle α . Exprimons le chemin optique (MM') en fonction de $(AIJA')$:

$$L(MM') = L(AIJA') + n'\vec{u}' \cdot \vec{A'M} - n\vec{u} \cdot \vec{AM}$$

Le premier terme étant constant, seuls les deux derniers termes joueront un rôle. Ecrivons les coordonnées des vecteurs dans les deux repères orthonormés :

$$\vec{AM} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \text{ et } \vec{A'M'} = \begin{pmatrix} dx' \\ dy' \\ dz' \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \sin(\alpha)\cos(\varphi) \\ \sin(\alpha)\sin(\varphi) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix} \text{ et } \vec{u}' = \begin{pmatrix} \sin(\alpha')\cos(\varphi) \\ \sin(\alpha')\sin(\varphi) \\ \cos(\alpha') \end{pmatrix}$$

La condition devient :

$$n' dz' \cos(\alpha') - ndz \cos(\alpha) + (n' dx' \sin(\alpha') - ndx \sin(\alpha)) \cos(\varphi) = \text{constante}$$

La constante peut être évaluée pour le rayon sur l'axe et vaut $n'dz'-ndz$. Cette équation est vérifiée pour tout rayon, donc pour tout α . On obtient alors les deux relations suivantes :

$$n'dx'\sin(\alpha')-ndx\sin(\alpha)=0$$

Relation d'Abbe : aplanétisme : conservation du stigmatisme dans un plan perpendiculaire à l'axe optique.

$$n'dz'\sin^2(\alpha'/2)-ndz\sin^2(\alpha/2)=0$$

Relation d'Herschel : latitude de réglage en profondeur : conservation du stigmatisme le long de l'axe optique

Ces deux relations sont incompatibles, sauf pour des petits objets et des petits angles où ces relations (approximation de Gauss) relient les grandissements :

$$G_t = \frac{dx'}{dx} \text{ est le grandissement transversal}$$

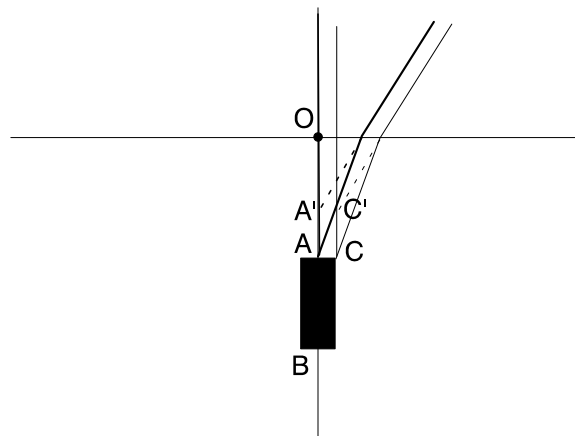
$$G_\alpha = \frac{\alpha'}{\alpha} \text{ est le grandissement angulaire}$$

$$G_l = \frac{dz'}{dz} \text{ est le grandissement longitudinal}$$

Au voisinage de A et A' :

$$G_t G_\alpha = \frac{n}{n'} \quad G_l G_\alpha^2 = \frac{n}{n'} \quad G_t = G_l G_\alpha$$

Reprenons l'exemple du dioptre plan de séparation air-eau :



Un poisson est à 40 cm sous l'eau, et a une longueur de 20 cm. Un observateur extérieur de l'eau voit une image déformée. Pour les petits angles, nous avons :

$$\frac{n_{eau}}{OA} = \frac{n_{air}}{OA'}$$

$$\overline{OA'} = -0,4/1,33 = -0,3\text{m}$$

$$\overline{OB'} = -0,6/1,33 = -0,45\text{m}$$

ce qui conduit à une taille de l'image de 0,15cm, d'où un grandissement longitudinal $G_l = 0,15/0,2 = 0,75$. Pour le grandissement angulaire, nous avons $G_\alpha = n_{eau} = 1,33$ et pour le grandissement transversal, comme un rayon normal à la surface n'est pas dévié, nous avons $G_t = 1$. Nous vérifions alors les relations précédentes.

IV – Approximation de Gauss

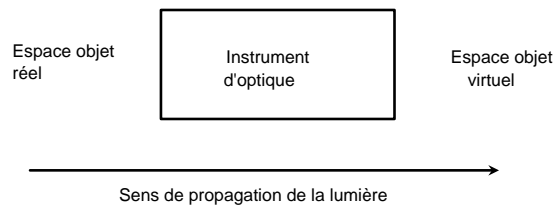
Nous venons de voir que les conditions de stigmatisme rigoureux ne sont remplies que pour un nombre limité de systèmes optiques et pour des couples de points particuliers.

Lorsque les conditions de stigmatisme ne sont pas remplies, les images présentent des aberrations. Cependant, lorsqu'on diaphragme les objets, les images redeviennent de bonne qualité. **L'approximation de Gauss est l'approximation linéaire de l'optique géométrique.**

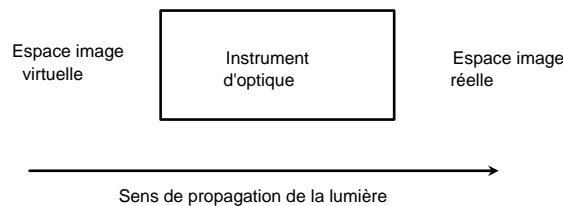
1 – Notion d'image

Les systèmes optiques centrés dont nous parlerons sont des instruments à symétrie de révolution autour d'un axe, destinés à former des images, c'est à dire une représentation des objets qui rappelle point par point leur apparence.

2 – Espaces objet et image



Un objet réel est un objet lumineux dont les divers points émettent des rayons formant un cône divergent.



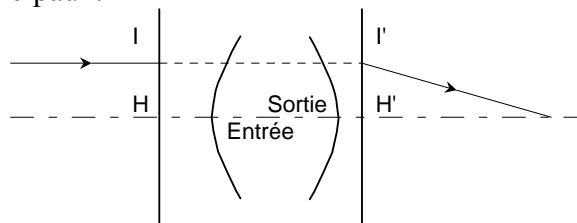
Un instrument d'optique donne d'un objet une image réelle si celle-ci peut être recueillie sur un écran. Si celle-ci ne peut être recueillie sur un écran, elle est virtuelle.

Les points d'un objet ou d'une image virtuelle ne sont que les points d'intersections géométriques des prolongements des rayons réels.

3 – Eléments cardinaux

a – Plans principaux ou unitaires

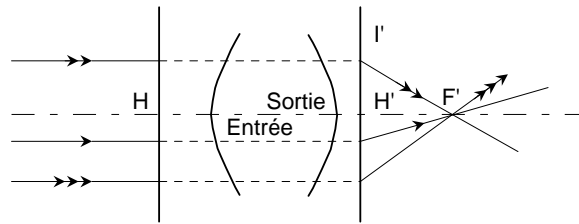
Les points principaux H et H' sont des points conjugués pour lesquels le grandissement transversal vaut 1. Les plans principaux sont les plans perpendiculaires à l'axe contenant les points principaux.



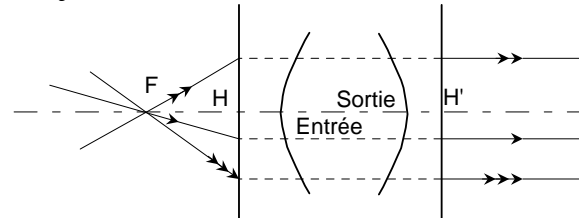
Considérons un rayon incident parallèle à l'axe optique, il coupe le plan principal objet en I, le rayon émergent correspondant doit passer par le point I' image de I par le système. Ses plans servent de limite pour qualifier un objet ou une image de réelle ou virtuelle.

b – Foyers

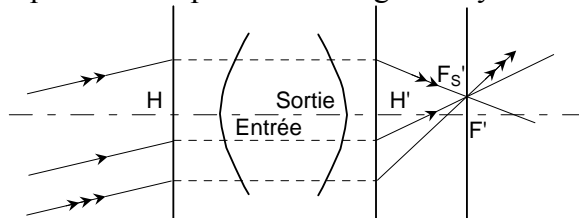
Le foyer image F' est l'image d'un point à l'infini sur l'axe. Sa position est repérée par rapport au point principal image H'.



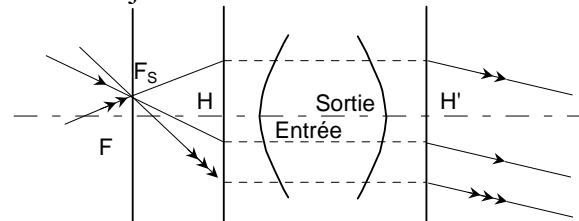
Le foyer objet F a pour image le point à l'infini sur l'axe. Sa position est repérée par rapport au point principal objet H.



Les foyers secondaires sont très utiles pour le tracer des images. Un faisceau de rayons parallèles incidents se coupent dans le plan focal image au foyer secondaire F's.



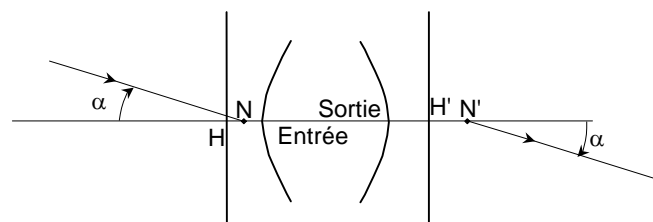
De même, un faisceau de rayons parallèles émergents provient d'un point dans le plan focal objet, le foyer secondaire objet.



Attention : les foyers objet et image ne sont pas conjugués

c – Points nodaux

Les points nodaux N et N' sont des points conjugués pour lesquels le grandissement angulaire vaut 1. Ces points ne sont différents des points principaux que si les milieux extrêmes n'ont pas le même indice. En effet, d'après la relation entre les grandissements $G_t G_\alpha = 1$ pour des milieux de même indice, pour N et N' couple de points conjugués, si $G_\alpha = 1$, alors $G_t = 1$ et N et N' appartiennent aux plans principaux.



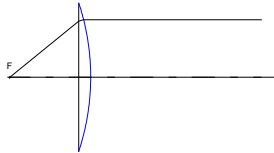
Remarque : l'optique matricielle : qu'est ce que c'est ?

Nous avons maintenant tous les outils nécessaires pour traiter les miroirs, lentilles et systèmes centrés. Dans l'industrie, l'optique géométrique est traitée à l'aide de matrice, c'est l'optique matricielle. Son intérêt principal repose sur son formalisme à base de matrices comme son nom l'indique et est justifié lorsque le nombre d'éléments optiques formant le système est supérieur ou égal à 2.

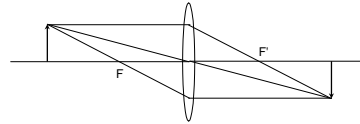
Lentilles minces

I – Présentation

Afin de limiter toutes les aberrations, il existe une très grande variété de lentilles. Par exemple, une lentille plano-convexe est composée d'une surface plane et d'une surface sphérique. L'aberration étant limitée lorsque la source est au foyer objet, côté plan. Pour un montage 4f (objet et image positionner de manière symétrique par rapport à la lentille), il convient d'utiliser plutôt une lentille symétrique, c'est-à-dire ici bi-convexe.




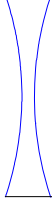


Lentille plano-convexe



Lentille biconvexe

Un ménisque est composé de deux dioptries ayant leur centre de courbure orienté selon la même direction. Il existe des ménisques convergents et divergents (fonction de la position relative de C_1 et C_2).

Comme pour les miroirs, il existe différents types de lentilles, des lentilles convergentes et des lentilles divergentes symbolisées ainsi :

Lentille	Convergente	Divergente
Exemple		
Symbole		

II – Elements cardinaux

I – Distance focale

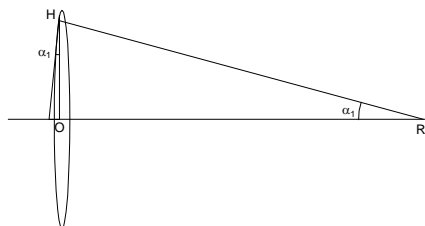
Le plus simple pour calculer la distance focale associée à une lentille mince est d'assimiler la zone du point d'incidence à un prisme fin. Pour simplifier le calcul, nous utiliserons une lentille biconvexe. Nous avons vu que la déviation associée vaut :

$$(n-1)A = (n-1)(\alpha_1 + \alpha_2)$$

et est indépendant de l'angle d'incidence. On a pour le premier dioptre :

$$\alpha_1 = \frac{\overline{OH}}{\overline{OR_1}}$$

Où O représente le centre optique. $\overline{OR_1}$ est mesuré dans le sens incident de la lumière, ici $\overline{OR_1} > 0$. Considérons l'association de deux prismes. Pour le premier, relierons α_1 au rayon de courbure :

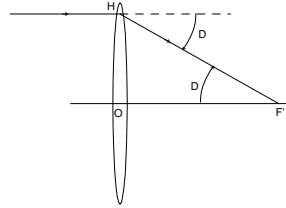


conduisant à :

$$(n-1)A = (n-1)\left(\frac{\overline{OH}}{\overline{OR}_1} - \frac{\overline{OH}}{\overline{OR}_2}\right)$$

A partir de la définition du foyer image F' , et à l'aide du schéma ci-dessous, on trouve :

$$\frac{1}{\overline{OF}'} = \frac{D}{\overline{OH}} = (n-1)\left(\frac{1}{\overline{OR}_1} - \frac{1}{\overline{OR}_2}\right)$$



On désigne souvent la distance focale \overline{OF}' par f' . Souvent, on préfère préciser la nature de la lentille (convergente ou divergente) et donner sa « focale », c'est-à-dire la valeur absolue de f' qui est alors notée f .

De la même manière, on montre que la position du foyer objet est placée symétriquement par rapport à O. On a :

$$\overline{OF} = -\overline{OF}'$$

2 – Eléments cardinaux N, N' et H, H'

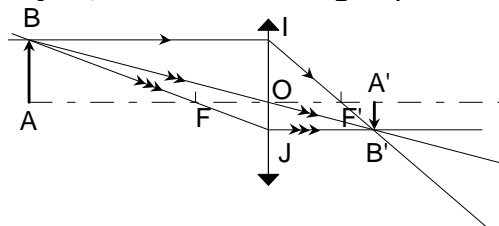
Les points nodaux sont confondus avec le centre de la lentille, en effet, le dioptre est approché par un plan perpendiculaire à l'axe en O. Il n'y a pas de déviation du rayon passant par le centre optique.

Les points principaux, comme les indices des milieux incidents et transmis sont les mêmes, sont confondus avec les points nodaux et donc aussi avec le centre optique.

III – Relation de conjugaison

1 – Relation de conjugaison de Descartes

Connaissant la position des foyers, on construit l'image à partir d'un rayon passant par O.



en appliquant le théorème de Thalès :

$$\frac{\overline{OF}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{JF}}{\overline{JB}} = \frac{\overline{JO}}{\overline{JI}} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{OF}'}{\overline{OA}'} = \frac{\overline{IF}'}{\overline{IB}'} = \frac{\overline{IO}}{\overline{IJ}}$$

D'où :

$$\frac{\overline{OF}}{\overline{OA}} + \frac{\overline{OF}'}{\overline{OA}'} = 1$$

Ou si l'on utilise la forme connue :

$$\frac{1}{\overline{OA}'} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OF}'}$$

On la trouve encore écrite sous la forme :

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'}$$

2 – Relation de conjugaison de Newton

En utilisant le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{\overline{FA}}{\overline{OF}} = \frac{\overline{OI}}{\overline{JO}} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{F'A'}}{\overline{OF'}} = \frac{\overline{JO}}{\overline{OI}}$$

conduisant à :

$$\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = -(\overline{OF'})^2$$

Entraînement : lentille convergente, $f=20$ cm, objet réel à 30 cm de la lentille. Tracer les rayons lumineux permettant de déterminer la position de l'image. Utiliser la formule de conjugaison de Descartes puis de Newton et retrouver le résultat. Reprendre avec une lentille divergente $f=-20$ cm.

III – Notion sur les aberrations

L'approximation de Gauss suppose les objets petits et les inclinaisons des rayons lumineux faibles. Nous avons jusqu'à présent supposé l'indice n constant dans les lentilles. En fait, ce ne sont que des approximations. Lorsque l'image attendue n'est pas fidèle à l'objet (dans sa forme et dans sa couleur), nous sommes en présence d'aberrations.

1 – L'aberration chromatique

L'aberration chromatique est la variation de la focale en fonction de la longueur d'onde. Cette aberration est indépendante de l'approximation de Gauss. Comme nous l'avons vue, la distance focale est une fonction de $n-1$ mais aussi des rayons de courbure. Il existe dans le visible une façon simple de considérablement réduire le problème de l'aberration chromatique en accolant 2 lentilles composées de verres différents (flint et crown). La première lentille est convergente, la seconde divergente. Ainsi, l'une compense l'effet de l'autre tout en ayant une distance focale. Cette association s'appelle un **achromat**.

2 – Objet hors axe, astigmatisme

Lorsqu'un objet est positionné loin de l'axe optique, le montage perd sa symétrie. L'image devient une tâche qui se focalise en des lieux différents pour les directions x et y . On parle d'image tangentielle et sagittale.

3 – Aberration de sphéricité

Pour un objet rejeté à l'infini, on observe une focalisation autour du foyer. L'extension de l'image selon l'axe optique est l'aberration sphérique longitudinale et dans le plan focal image l'aberration sphérique transversale. Il existe différents types de lentilles, plano-convexe, biconvexe, ..., qui permettent d'avoir, si l'on connaît le montage optique, moins d'aberration. Cette aberration est fonction du diamètre du faisceau lumineux (ϕ).

4 – Coma

Pour une source hors d'axe, chaque zone concentrique de la surface de la lentille donne une image qui se translate, l'image n'est plus une petite tâche assimilable à un point mais une forme étendue, que l'on nomme coma. Il est possible de réduire cet effet en limitant les faisceaux marginaux par un diaphragme. Cette aberration est à rapprocher des aberrations de sphéricité.

5 – Courbure de champ

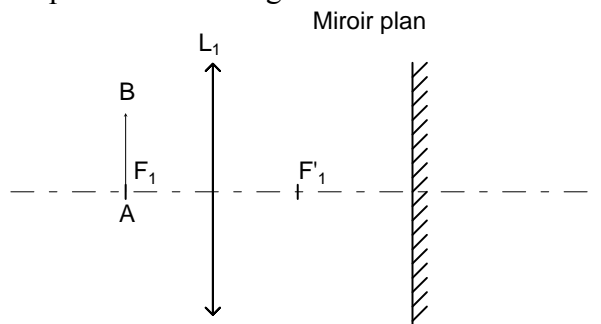
Même en l'absence d'aberration de sphéricité, un système optique forme une meilleure image d'une surface courbe que d'une surface plane. Si l'on trace des ensembles de rayons parallèles, on met en évidence la surface focale qui a une forme sphérique (nous l'avons supposé plane dans le cadre de l'approximation de Gauss).

6 - Distorsion

La distorsion de l'image d'un objet est associée à une modification de sa forme. Cela ne veut pas dire que la résolution du système est réduite. Cet effet est lié à la taille de l'objet.

Exercice 3 – Lentille + miroir plan

Trouver graphiquement la position de l'image de AB à la traversée du système optique



Exercice 4 – Lentille simple

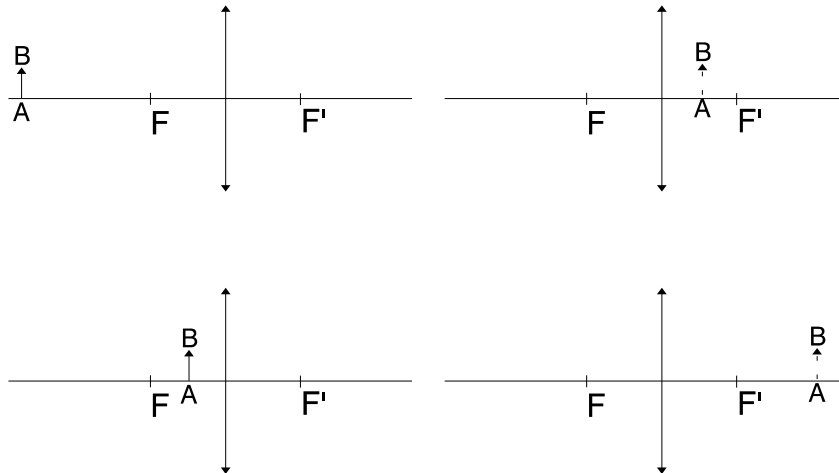
Soit une lentille convergente de distance focale 5 cm.

1 - Un objet réel est placé à 3 cm de la lentille, dessiner son image, préciser sa nature (réelle ou virtuelle) puis calculer sa position avec la relation de Newton.

2 – Maintenant un objet virtuel est placé à 3 cm de la lentille, dessiner son image, préciser sa nature (réelle ou virtuelle) puis calculer sa position avec la relation de Descartes.

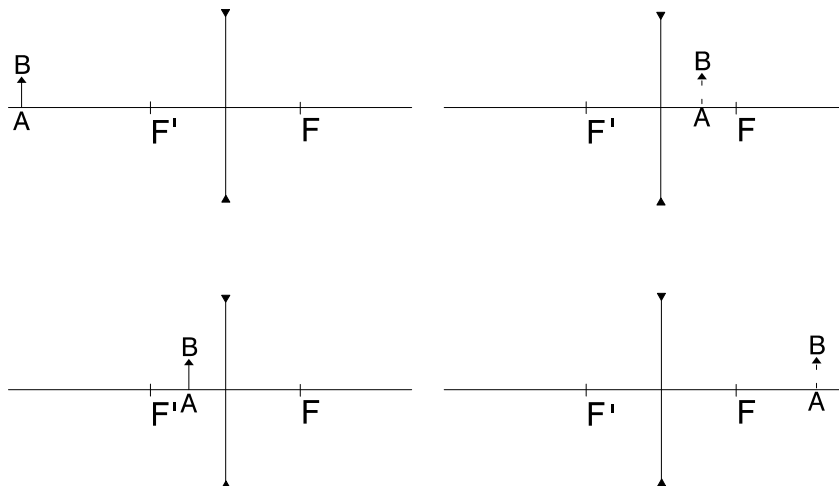
Exercice 5 – Lentille simple

1 – Lentille convergente : compléter les constructions suivantes



2 – Reprendre les dessins et remplacer l'objet par une image à la même position (on prendra soin de mettre l'image virtuelle en pointillé).

3 – Lentille divergente : compléter les constructions suivantes :



4 – Reprendre les dessins et remplacer l'objet par une image à la même position (on prendra soin de mettre l'image virtuelle en pointillé).

V – Association de 2 lentilles

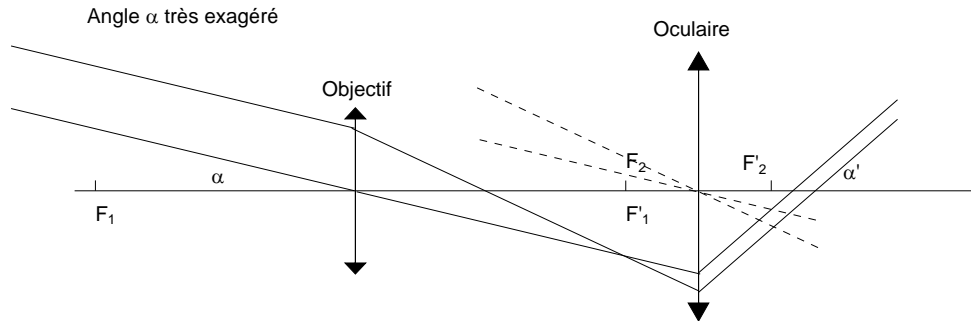
L'association de deux lentilles permet de modifier l'angle d'observation d'un objet et de collecter le maximum de lumière provenant de l'objet ponctuel.

1 – La lunette astronomique

La lunette astronomique est un système afocal puisque le faisceau incident parallèle à l'axe émerge parallèle à l'axe. Cette propriété est liée à l'œil qui n'accommode pas lorsqu'on observe un objet à l'infini. Considérons l'association de deux lentilles convergentes L_1 et L_2 de distance focale f'_1 et f'_2 .

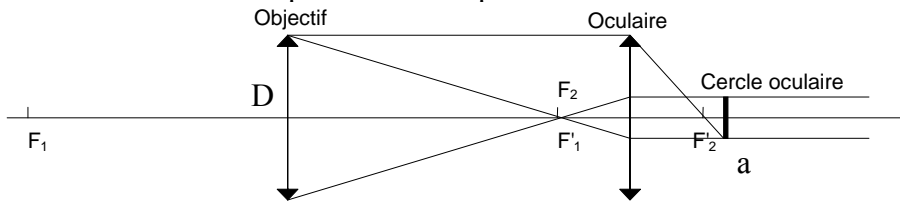
a – Position de l'oculaire

Si nous plaçons le foyer objet de la seconde lentille (oculaire) au foyer image de la première lentille (Objectif), nous obtenons un appareil afocal. La distance entre les deux centres optiques des lentilles est $e=f'_1+f'_2$. Traçons le trajet de deux rayons lumineux parallèles. Les 2 rayons lumineux parallèles se coupent au foyer secondaire image de l'objectif. Pour les prolonger au-delà de l'oculaire, il suffit de tracer deux rayons fictifs passant par le centre optique de l'oculaire, parallèles aux premiers rayons. De nouveau, les rayons parallèles se coupent aux foyers secondaires images. Nous pouvons ainsi prolonger le tracer.



b – Cercle oculaire (pupille de sortie)

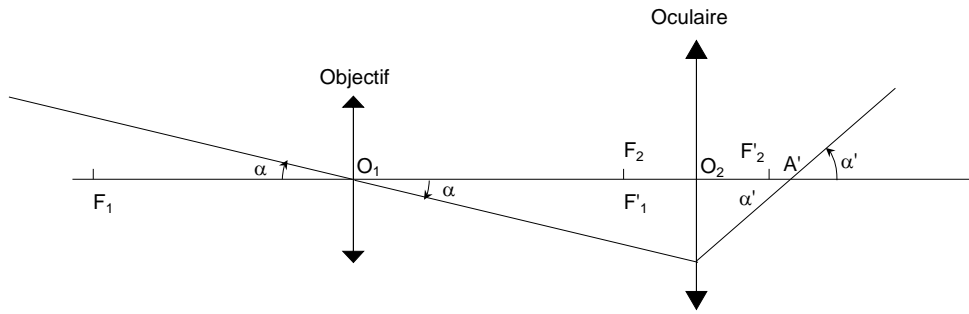
Le faisceau lumineux entrant dans l'instrument est pratiquement défini par la monture de l'objectif (pupille d'entrée). L'image de cette monture par l'oculaire est appelée cercle oculaire car c'est l'endroit le plus lumineux pour réaliser une observation confortable.



Il faut s'assurer que le diamètre du cercle oculaire est inférieur à celui de la pupille de l'œil (2 à 8 mm). En notant D le diamètre de l'objectif, et a celui du cercle oculaire :

$$\frac{1}{p'} = \frac{1}{f'_2} - \frac{1}{f'_1 + f'_2}, \quad G = |G_t| = \left| \frac{p'}{(f'_1 + f'_2)} \right| = \left| \frac{-f'_2}{f'_1} \right| = \frac{a}{D}$$

c – Grandissement angulaire



Le grandissement angulaire vaut :

$$G_a = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{O_2 O_1}{O_2 A'} = \frac{-f_1'}{f_2'}$$

2 – Formule de Gullstrand

La formule de Gullstrand donne la vergence de l'ensemble de deux systèmes centrés :

$$V = V_1 + V_2 - \frac{e}{n} V_1 V_2$$

Ou e est la distance $\overline{H_1 H_2}$ et n l'indice composant le milieu intermédiaire. En construisant l'image, par deux lentilles séparées de la distance e, d'un objet, il est facile de montrer cette relation pour n=1. Dans le cas des lentilles séparées par de l'air, nous avons :

$$V = \frac{1}{f_1'} + \frac{1}{f_2'} - e \frac{1}{f_1} \frac{1}{f_2'}$$

3 – Propriétés des instruments : grandissement, puissance, grossissement

On distingue deux grandes familles d'instruments d'optique :

- les instruments oculaires qui donnent une image virtuelle observée par l'œil (loupe, microscope, lunette)
- les instruments objectifs ou de projection qui donnent d'un objet une image réelle recueillie sur un écran ou un film photographique.

Dans les propriétés que nous allons indiquer, nous ne nous intéresserons qu'à la grandeur de l'image donnée par l'instrument.

a – Grandissement (transversal)

C'est le paramètre qui caractérise les instruments de projection pour lesquels l'image est réelle et donc caractérisée par sa taille $A'B'$. Dans le cas d'un objet à distance finie, on s'intéresse simplement au grandissement transversal. Dans le cas où l'objet est à l'infini, le grandissement est remplacé par la quantité $A'B'/\alpha$ (focale objet du système).

b – Puissance

C'est le paramètre associé à un instrument oculaire, destiné à observer des objets rapprochés. La puissance est définie par le rapport :

$$P = \frac{\alpha'}{AB}$$

Et s'exprime en dioptries. Dans le cas d'un objet à l'infini, ces deux quantités sont indépendantes de la position de l'œil. La puissance vaut alors : $P = -\frac{1}{f'}$. Dans le cas du microscope : $P = \frac{\alpha'}{AB} = P_{oculaire} G_{t,objectif}$. Couramment, la puissance est une valeur absolue.

Le grossissement commercial du microscope est par définition le produit de la puissance exprimée en dioptries par la distance minimale de vision distincte fixée à 0,25m, soit $G=0,25P$.

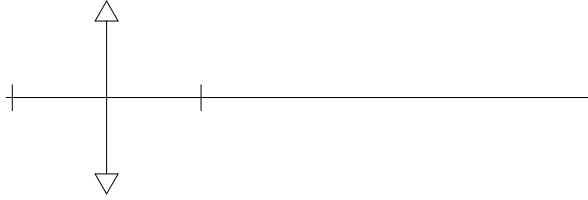
c – Grossissement (ou grandissement angulaire)

Il est défini comme le rapport de l'angle sous lequel est vu l'image formée par l'instrument et l'angle sous lequel est vu l'objet à l'œil.

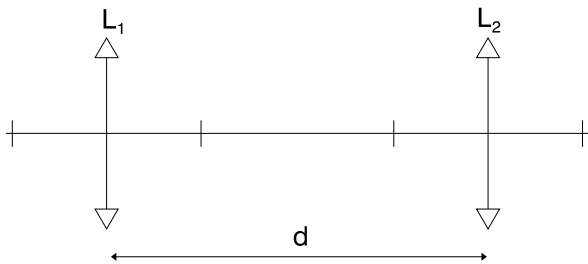
$$G = \frac{\alpha_{incident}}{\alpha_{sortie}}$$

Exercice 6 : Méthode de Badal pour la détermination de la focale d'une lentille convergente ou divergente

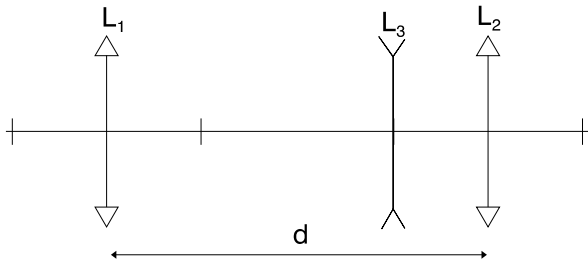
a - Une source ponctuelle est positionnée dans le plan focal objet de la lentille L_1 . Comment sont les rayons lumineux à la sortie de la lentille ? On notera f_1 la distance focale image de cette lentille.



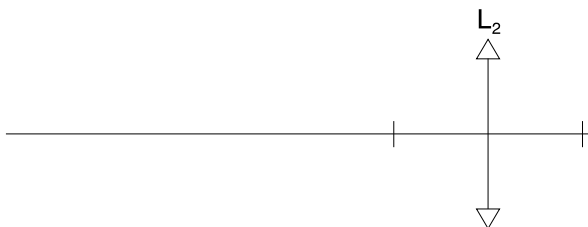
b - Une seconde lentille de même caractéristique est positionnée à la distance d de la première lentille. Qu'obtient-on ? On notera $f_2=f_1$ la distance focale image de cette lentille.



c - Une troisième lentille L_3 est placée au foyer objet de L_2 . Comment vont être déviés les rayons lumineux si cette lentille est une lentille divergente ? On notera f_3 la distance focale image de cette lentille. Déterminer le lieu de concourance des rayons lumineux après la traversée de L_3 . Déterminer la distance du foyer objet de L_2 à ce lieu.



d - Ce lieu devient l'objet de la lentille L_2 . Appliquer la formule de Newton et déterminer la relation liant σ' , f_2 et f_3 . Expliciter f_3 en fonction des autres grandeurs. Cette relation est due à Badal.



e - Il existe une condition restrictive pour les lentilles convergentes, laquelle ?

Exercice 7 : Lunette astronomique

1 – Construction d'une lunette de grandissement angulaire 20.

a - Donner la démarche à suivre. En particulier, on précisera la position de l'oculaire par rapport à l'objectif.

b – Définir le cercle oculaire en une ou deux phrases.

2 – On dispose d'une lentille convergente de focale 20 cm

a - Quelle est la focale de la seconde lentille à commander si celle ci est convergente. Donner dans ce cas la valeur du grossissement angulaire. Quel est l'encombrement du système composé des 2 lentilles ?

b - Quelle est la focale de la seconde lentille à commander si celle ci est divergente. Donner dans ce cas la valeur du grossissement angulaire. Quel est l'encombrement du système composé des 2 lentilles ?

c - Laquelle choisiriez-vous et pourquoi ?

Exercice 8 – Association de lentilles

On possède deux lentilles convergentes dont les caractéristiques sont :

Diamètre : 10 cm et distance focale 50 cm

Diamètre : 1 cm et distance focale 3 cm.

On souhaite construire une longue-vue.

1 – On considère que l'objet est rejeté à l'infini, où doit-on positionner la seconde lentille pour que l'œil n'accomode pas ?

2 – Que vaut le grandissement angulaire dans ce cas ?

4 – Doublet achromatique

Newton, ayant des dispersions similaires pour tous les verres conclut qu'on ne peut s'affranchir des aberrations chromatiques. Cette hypothèse est fautive et le premier doublet achromatique en combinant 2 éléments flint et crown voit le jour avec Chester Moor Hall en 1733 qui ne publia pas et redécouvert par John Dollond qui brevetât en 1758.

Les indices et la dispersion de 2 verres typique (voir partie pouvoir dispersif sur le prisme) sont :

Type de verre	$n_d(589\text{nm})$	$v_d = \frac{n_d(589\text{nm}) - 1}{n_F(486\text{nm}) - n_C(656\text{nm})}$
Crown	1,5180	59,6
Dense flint DF3	1,6210	36,2

Remarque : les indices sont tabulés en fonction des lignes de Fraunhofer, associées à des transitions optiques de certaines sources.

Considérons 2 lentilles accolées :

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2} - e \frac{1}{f'_1} \frac{1}{f'_2}$$

Si $e=0$ et si on utilise la formule trouvée pour les lentilles en introduisant ρ :

$$\frac{1}{f'} = (n-1) \left(\frac{1}{OR_1} - \frac{1}{OR_2} \right) = (n-1)\rho$$

Pour ne pas avoir d'aberration chromatique, il faut que la distance focale pour le rouge (R) soit égale à celle pour le bleu (B) :

$$\frac{1}{f'_R} = \frac{1}{f'_B}$$

Soit :

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = -\frac{n_{2B} - n_{2R}}{n_{1B} - n_{1R}}$$

La distance focale peut être exprimée pour une longueur d'onde jaune, intermédiaire entre le rouge et le bleue, on a alors :

$$\frac{1}{f_{1J}'} = (n_{1J} - 1)\rho_1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{f_{2J}'} = (n_{2J} - 1)\rho_2$$

En éliminant ρ :

$$\frac{f_{2J}'}{f_{1J}'} = -\frac{n_{2B} - n_{2R}}{n_{2J} - 1} \Bigg/ \frac{n_{1B} - n_{1R}}{n_{1J} - 1}$$

Soit encore la condition :

$$f_{1d}'v_{1d} + f_{2d}'v_{2d} = 0$$

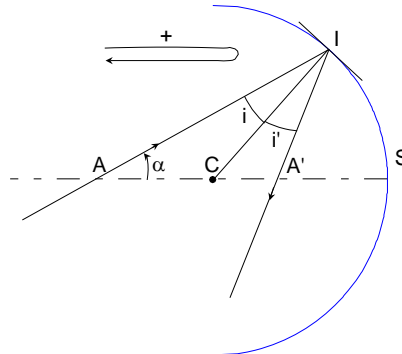
Il existe beaucoup de configurations de doublet. Comme le nombre d'Abbe n'est pas constant pour les verres, il existe deux conditions, l'une à satisfaire pour ne pas avoir d'aberration chromatique et l'autre pour avoir la distance focale voulue, à savoir :

$$\frac{1}{f_d'} = \frac{1}{f_{1d}'} + \frac{1}{f_{2d}'}$$

Remarque : l'autre possibilité pour avoir un doublet achromatique est de séparer les lentilles constituées d'un même matériau, formant ainsi un doublet de Huygens. L'aberration chromatique latérale est bien corrigée mais pas l'aberration axiale.

Miroirs sphériques

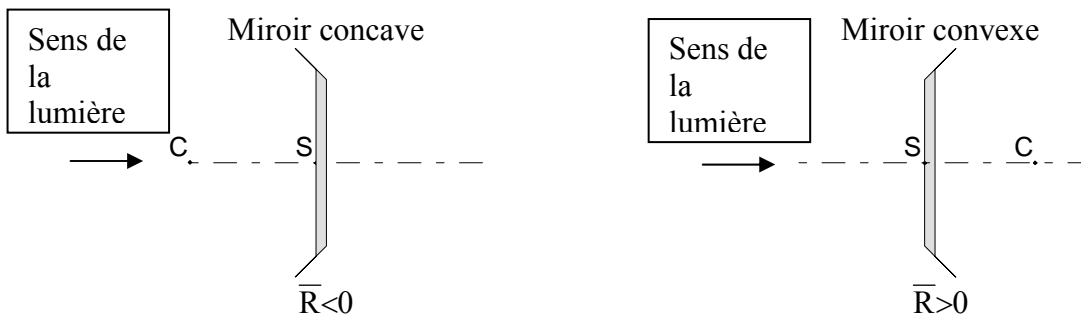
I – Présentation



Les miroirs sphériques sont des miroirs recouverts par évaporation d'une surface métallique. Le sens positif est le sens de propagation de la lumière. Les mesures algébriques \overline{AI} et $\overline{IA'}$ sont toutes deux positives. Le rayon réfléchi par la surface du dioptré sphérique est obtenu à partir des lois de Snell Descartes. L'angle i et i' sont égaux en norme. C est le centre du rayon de courbure, S est le sommet.

Notons \overline{R} le rayon de courbure. Avec notre orientation de l'axe optique, se pose la question du signe de $\overline{R}=\overline{SC}$ dans le cas que nous venons de tracer. Il sera évalué à partir du sens de la lumière **incidente**, et donc compté négatif dans notre cas, c'est-à-dire si le miroir est concave.

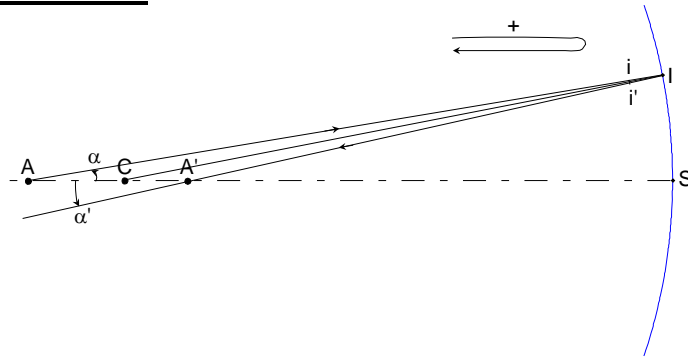
Il existe deux types de miroir, des miroirs concaves et des miroirs convexes symbolisés ci-dessous :



Notons V la vergence du miroir, elle s'exprime en dioptrie (unité : δ) et est égale à $-\frac{2}{\overline{R}}$. Nous verrons par la suite son lien avec la focale. La vergence a les dimensions physiques de l'inverse d'une longueur. Si V est positif, le système est convergent, ce qui signifie qu'un rayon parallèle à l'axe optique converge vers l'axe optique. Si V est négatif, le système est divergent. Plus la vergence est importante, plus les rayons sont déviés.

Un miroir concave est dit convergent alors qu'un miroir convexe est dit divergent.

II – Approximation de Gauss



Dans le cadre de l'approximation de Gauss, les angles α , i , i' et α' sont très petits. On a alors : $\sin(\alpha) = \alpha$, $\tan(\alpha) = \alpha$ et $\cos(\alpha) = 1$. Le point I, correspondant à un grandissement transversal de 1 est donc maintenant dans le plan contenant S. S est le point nodal. La surface approchée par un plan, et contenant S, est maintenant le plan principal.

III - Éléments cardinaux

1 - Foyers

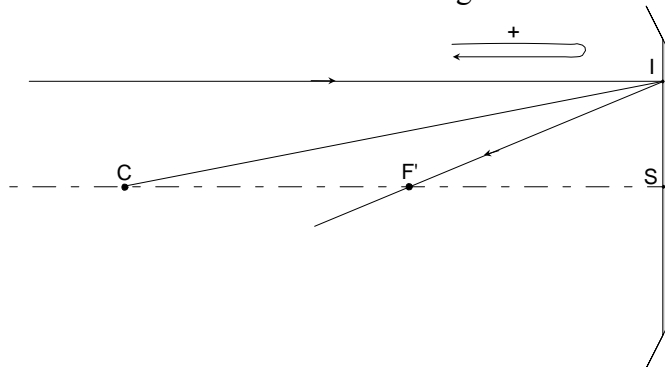
Recherchons les foyers. Pour cela, on considère un rayon parallèle à l'axe optique provenant d'un point source rejeté à l'infini.

$$\frac{-2}{R} = \frac{1}{f'}$$

D'après le principe du retour inverse de la lumière, la position du foyer objet est donnée par :

$$\frac{2}{R} = \frac{1}{f}$$

Les foyers sont donc confondus et situés au milieu du segment SC.



Principe du retour inverse de la lumière : le trajet suivi par la lumière ne dépend pas de son sens de parcours. Ainsi, F et F' ne sont pas dissociables.

2 - Points nodaux et plans principaux

Les points nodaux sont confondus avec S alors que les plans principaux sont les plans du miroir, donc les plans orthogonaux à l'axe optique et passant par S.

IV – Relations de conjugaison,

1 - Relation de conjugaison de Descartes

On considère à nouveau le schéma précédent, avec un miroir concave, et l'on exprime \overline{IS} en fonction de α , α' et β (angle \widehat{SCI}) :

$$\alpha = \frac{\overline{SI}}{\overline{AS}} (> 0), \quad \alpha' = \frac{\overline{SI}}{\overline{A'S}} (< 0)$$

qui dépendent du sens optique et :

$$\beta = -\frac{\overline{SI}}{\overline{R}} (> 0)$$

indépendant du sens optique. Dans le cadre de l'approximation de Gauss, en considérant les 3 triangles ayant S et I en commun, nous avons les relations angulaires suivantes :

$$|\alpha| + |i| = |\beta| = |\alpha'| - |i'|$$

Où nous avons préféré travailler en valeur absolue. Nous rétablirons les mesures algébriques en fin de calcul afin d'éviter les erreurs de signe.

$$(|\alpha| + |i|) + (|\alpha'| - |i'|) = |\alpha| + |\alpha'| = 2\beta$$

En divisant par \overline{SI} (toujours le même quel que soit le sens), nous obtenons :

$$\frac{1}{\overline{SA'}} - \frac{1}{\overline{SA}} = \frac{-2}{\overline{R}}$$

C'est la formule de Descartes associée au miroir. Elle est analogue à la formule pour la lentille et c'est d'ailleurs un des moyens de ne pas se tromper : en dépliant le système, on peut facilement visualiser le trajet des rayons et éviter bien des erreurs de signe.

2 – Relation de conjugaison de Newton

Pour écrire la relation de conjugaison à partir des foyers, il suffit d'utiliser le théorème de Thalès en F (F').

$$\frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'S}} = \frac{\overline{F'B'}}{\overline{F'I}} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{FA}}{\overline{FS}} = \frac{\overline{FB}}{\overline{FJ}}$$

En projetant selon l'axe optique :

$$\frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'S}} = \frac{\overline{F'B'}}{\overline{F'I}} = \frac{\overline{SJ}}{\overline{SI}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{FA}}{\overline{FS}} = \frac{\overline{FB}}{\overline{FJ}} = \frac{\overline{SI}}{\overline{SJ}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$$

qui permettent d'écrire :

$$\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = -(\overline{S'F'})^2$$

Entraînement : un objet est positionné 2m avant un miroir concave de rayon de courbure de 1m. Tracer les rayons lumineux permettant de déterminer la position de l'image. Utiliser la formule de conjugaison de Descartes puis de Newton et retrouver le résultat. Reprendre avec miroir convexe.

Exercice 9 - Miroir

Considérons un miroir convergent de rayon de courbure 2 m.

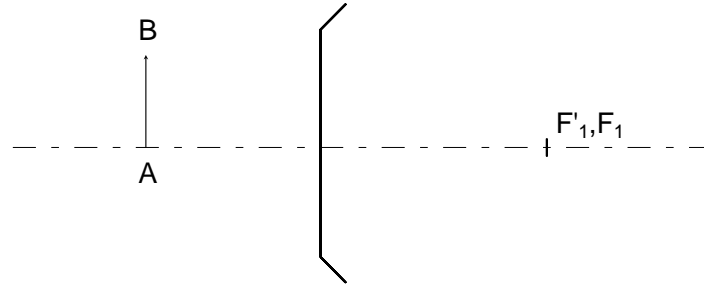
- 1- Indiquer la position du foyer objet et du foyer image.
- 2- Calculer la vergence.
- 3- On place un objet à 1,5 mètres en avant du miroir, calculer la position de l'image.
- 4- Que vaut le grandissement transversal ?

Exercice 10 – Miroir

Considérons un miroir convergent de rayon de courbure 4 m.

- 1 - Indiquer la position du foyer objet et du foyer image.
- 2 - Donner la vergence du miroir.
- 3 - On place un objet à 1,5 mètres en avant du miroir, calculer la position de l'image avec la formule de conjugaison de Descartes.
- 4 - Calculer la position de l'image avec la formule de conjugaison de Newton.

Exercice 11 - Trouver graphiquement la position de l'image de AB après réflexion sur le miroir divergent



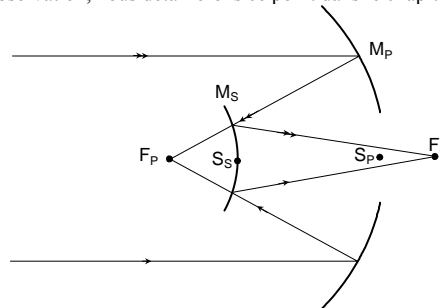
IV – Association de 2 miroirs : le télescope réflecteur

1 – Vocabulaire

Les systèmes centrés constitués uniquement de dioptries plans ou sphériques sont dits systèmes centrés dioptriques. Ceux contenant uniquement des miroirs sont dits systèmes centrés catadioptriques.

2 – Schéma du télescope

L'objectif est constitué d'un miroir concave M_p , appelé miroir primaire ; le foyer F_p de M_p est le foyer primaire. Ce miroir est associé à un miroir secondaire M_s qui peut être plan, convexe ou concave. Considérons le télescope Cassegrain, le miroir primaire est convergent, le miroir secondaire divergent. Une ouverture centrale laisse passer le faisceau qui converge au foyer Cassegrain. Il convient de mettre un oculaire en F_c pour réaliser une observation, nous détaillerons ce point dans le chapitre suivant.



Comme exemple d'application des formules de conjugaison, nous allons calculer la position de F_c par rapport au sommet S_p du miroir primaire. Prenons comme caractéristiques :

$$R_p = 19,972 \text{ m}$$

$$R_s = 4,465 \text{ m}$$

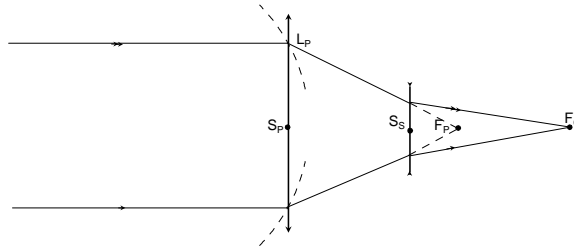
$$\text{Distance de séparation des deux miroirs } e = 8,184 \text{ m}$$

Nous devons trouver la position de l'objet du miroir secondaire : $\overline{S_s F_p} = \frac{R_p}{2} - e = 1,802 \text{ m}$, puis calculer son image avec une formule de

$$\text{conjugaison : } \frac{1}{\overline{S_s F_c}} - \frac{1}{\overline{S_s F_s}} = \frac{-2}{R_s} \text{ d'où } \overline{S_s F_c} = 9,345 \text{ m et } \overline{S_p F_c} = 1,16 \text{ m.}$$

3 – Une autre vision

Une possibilité pour éviter les erreurs de signe consiste à déplier le système en remplaçant un miroir de rayon de courbure R par une lentille mince de focale $R/2$ (convergente si le miroir est concave, divergente s'il est convexe). Il est cependant indispensable de faire une figure pour vérifier la cohérence du résultat obtenu.



Exercice – Association de miroirs (facultatif)

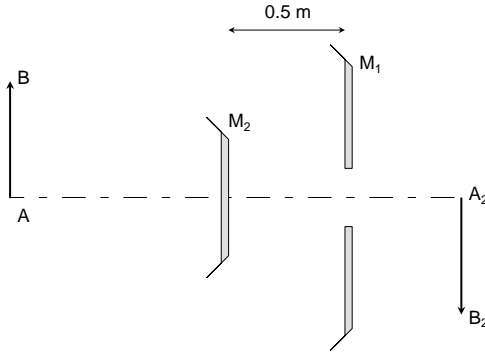


Schéma de l'association des miroirs ne respectant pas les échelles

A – Miroir M_1 seul

Soit un miroir concave M_1 de rayon de courbure $R = 2\text{ m}$ et de diamètre $\phi = 30\text{ cm}$.

- 1 – Déterminer la position des éléments cardinaux
- 2 – Calculer la vergence (rappel : $V = n/f'$)
- Un objet AB de 10 cm de haut est placé à 3 m devant ce miroir.
- 3 – Calculer la position de l'image A_1B_1 à partir de la formule de Newton
- 4 – Calculer la position de l'image A_1B_1 à partir de la formule de Descartes
- 5 – Déterminer le grandissement transversal

B – Ajout d'un second miroir M_2

Un second miroir convexe M_2 est placé à 50 cm de M_1 . Il possède un rayon de courbure de 3 m et un diamètre de $\phi = 5\text{ cm}$. M_1 est troué en son centre afin de laisser passer la lumière.

- 1 – Faire un schéma soigné à l'échelle $1/20$
- L'image de M_1 devient l'objet de M_2 .
- 2 – Tracer l'image A_2B_2 de l'objet AB après la traversée du système optique.
- En prenant comme origine le point principal du miroir M_2 :
- 3 – Calculer la position de l'image A_2B_2 à partir de la formule de Newton
- 4 – Calculer la position de l'image A_2B_2 à partir de la formule de Descartes
- 5 – Déterminer le grandissement transversal

C – Analyse du système centré (facultatif)

Les grandeurs associées au système centré seront indexées S .

- 1 – Calculer le grandissement du système centré
- 2 – Déterminer graphiquement les éléments principaux puis estimer $\overline{H'_S F'_S}$
- 3 – Votre estimation est-elle compatible avec la formule de Gullstrand : $V_S = V_1 + V_2 - \frac{e}{n} V_1 V_2$?

Traitement matriciel

Cette méthode permet d'assembler rapidement plusieurs éléments d'optique, de faire varier des paramètres dans un programme informatique ou un logiciel pour obtenir le système optique souhaité.

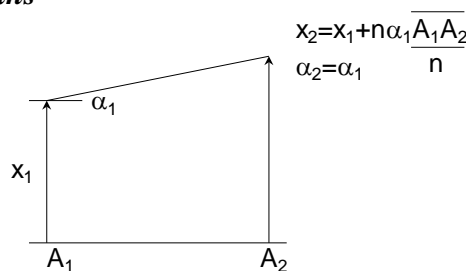
Nous nous limiterons à une introduction, décrivant les différents éléments avec les matrices associées pour parvenir aux caractéristiques du système considéré.

Dans le cas d'un rayon lumineux quelconque, il est caractérisé par 2 angles par rapport à l'axe optique et deux hauteurs. Généralement, on réduit le problème à une dimension (du fait de la symétrie cylindrique) et la matrice 4x4 (ou 2x2 en notation complexe possible du fait de la présence d'éléments nuls) devient une matrice 2x2.

Nous limiterons notre analyse à une hauteur x et un angle α .

I – Les matrices

1 – Translation entre 2 plans



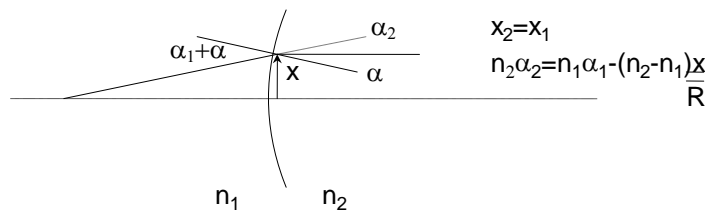
La matrice de translation entre 2 plans d'intersection A_1 et A_2 avec l'axe optique est de la forme :

$$\begin{bmatrix} 1 & \overline{A_1 A_2} \\ 0 & n \end{bmatrix}$$

La matrice de translation est aussi appelée matrice de déplacement.

$$\begin{bmatrix} x \\ n\alpha \end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} 1 & \overline{A_1 A_2} \\ 0 & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ n\alpha \end{bmatrix}_1$$

2 – Dioptre



Le dioptre a une surface inclinée de α par rapport à l'horizontale, $\alpha = \frac{x}{OR_1}$. L'angle d'incidence vaut $\alpha + \alpha_1$, l'angle réfracté. D'après la seconde loi de Snell-Descartes :

$$n_1(\alpha + \alpha_1) = n_2(\alpha + \alpha_2) \text{ d'où } n_2\alpha_2 = n_1\alpha_1 - (n_2 - n_1)\frac{x}{OR_1}$$

On a bien sûr $x_2 = x_1$.

La matrice de franchissement du dioptre sphérique est de la forme :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -V & 1 \end{bmatrix}$$

V est la vergence. Elle s'exprime en dioptrie (δ). Pour les miroirs ou les lentilles dans l'air, $V = 1/f$. Sans réflexion, $V = \frac{n_2 - n_1}{R}$, n étant l'indice du milieu et \bar{R} étant la courbure algébrique du dioptre. Dans le cas du miroir sphérique (dioptre réfléchissant), nous avons $V = \frac{-2n_1}{R}$ avec la courbure mesurée dans le sens incident.

II – Éléments pour les constructions graphiques

1 – Conjugaison

Si deux plans d'intersection A_1 et A_2 avec l'axe optique sont conjugués, tous les rayons lumineux passant par B_1 passent aussi par B_2 .

Comme :

$$\begin{aligned} x_2 &= ax_1 + bn_1\alpha_1 \\ n_2\alpha_2 &= cx_1 + dn_1\alpha_1 \end{aligned}$$

avec $x = \overline{AB}$. Il vient :

$b=0$ (indépendance par rapport à l'inclinaison), d'où $a=G_t$

$d = \frac{n_2}{n_1}G_a$ où G_a est le grandissement angulaire.

Le dernier élément, c , nécessite une analyse différente. Toute matrice translation multipliée à gauche ou à droite ne modifie pas cet élément. En conséquence, pour un dioptre, c 'est l'opposé de la vergence. La généralisation est possible : « c » est l'opposé de la vergence.

La matrice de transfert entre deux plans conjugués s'écrit par conséquent :

$$\begin{bmatrix} G_t & 0 \\ -V & \frac{n_2}{n_1}G_a \end{bmatrix}$$

2 – Éléments cardinaux

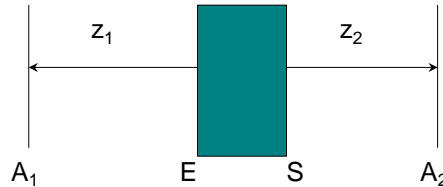
Après assemblage d'un grand nombre d'éléments optiques, il est nécessaire de déterminer la position des éléments cardinaux qui a eux seuls permettent un tracé aisé. Soit une matrice entre un plan d'entrée coupant l'axe en E et un plan de sortie coupant l'axe en S . Cette matrice peut être construite en multipliant les matrices associées aux éléments optiques. Elle a la forme :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ avec } c = -V$$

En multipliant par 2 matrices de translation, l'une avant et l'autre après le système optique, on obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & \overline{SA_2} \\ 0 & n_2 \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -V & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\overline{EA_1} \\ 0 & n_1 \\ & 1 \end{pmatrix}$$

En introduisant les distances z_1 et z_2 comme indiqué sur le schéma suivant :



Nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} 1 & z_2 \\ 0 & n_2 \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -V & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -z_1 \\ 0 & n_1 \\ & 1 \end{pmatrix}$$

Soit encore :

$$\begin{pmatrix} a - V \frac{z_2}{n_2} & b - a \frac{z_1}{n_1} + \frac{z_2}{n_2} \left(d + V \frac{z_1}{n_1} \right) \\ -V & d + V \frac{z_1}{n_1} \end{pmatrix}$$

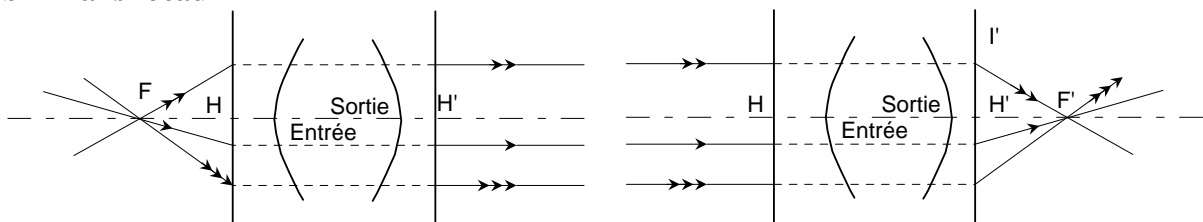
Cette matrice nous permettra de déterminer les éléments cardinaux aisément.

a – Distances focales

Par définition, les distances focales objet et image, f et f' sont :

$$f = -\frac{n_1}{V} \text{ et } f' = \frac{n_2}{V}$$

b – Plans focaux



Partons des propriétés, tout rayon issu de F émerge parallèlement à l'axe optique. Il en résulte $\alpha_2=0$ pour tout α_1 , ce qui conduit à $x_1=-n_1\alpha_1/c$. La distance \overline{EF} s'en déduit facilement :

$$\overline{EF} = -\frac{x_1}{\alpha_1} = n_1 \frac{d}{c} = fd$$

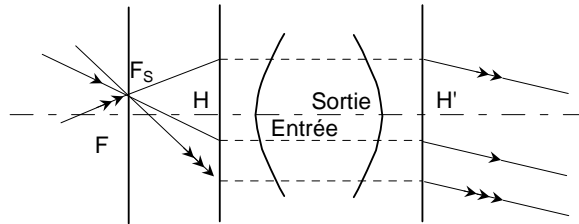
A partir de la matrice précédente, l'élément $d + V \frac{z_1}{n_1} = 0$ conduit au même résultat.

De même, tout rayon parallèle à l'axe optique ($\alpha_1=0$) passe par le foyer image, d'où :

$$n_2\alpha_2 = cx_1 = \frac{c}{a}x_2 \text{ conduisant à :}$$

$$\overline{SF'} = - \frac{x_2}{\alpha_2} = -n_2 \frac{a}{c} = f' a$$

c – Plans principaux

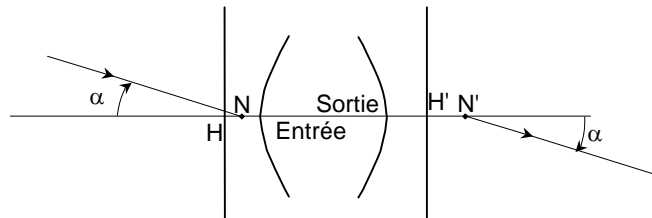


Les plans principaux sont les plans pour lesquels le grandissement vaut 1. Dans la matrice $[a,b;-V,d]$, $a=1$ et $b=0$. Comme le déterminant vaut 1, $d=1$

$$a - V \frac{z_2}{n_2} = 1 \text{ conduit à : } \overline{SH'} = f'(a - 1)$$

$$d + V \frac{z_1}{n_1} = 1 \text{ conduit à : } \overline{EH} = f(d - 1)$$

d – Points nodaux



Un rayon arrivant en N avec un angle α_1 ressort au point N' avec le même angle : $G_a=1$. Nous avons à résoudre :

$$\begin{bmatrix} \frac{n_1}{n_2} & 0 \\ -V & \frac{n_2}{n_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \overline{SN'} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ -V & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \overline{NE} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

qui conduit à :

$$a - V \frac{z_2}{n_2} = \frac{n_1}{n_2} \text{ d'où : } \overline{SN'} = f' \left(a - \frac{n_1}{n_2} \right)$$

et :

$$d + V \frac{z_1}{n_1} = \frac{n_2}{n_1} \text{ d'où : } \overline{EN} = f \left(d - \frac{n_2}{n_1} \right)$$

On en déduit la relation suivante :

$$\overline{H'N'} = \overline{HN} = f + f'$$

Si les 2 milieux sont identiques ($n_1=n_2$), les points nodaux sont confondus avec les plans principaux.

III - Exemples

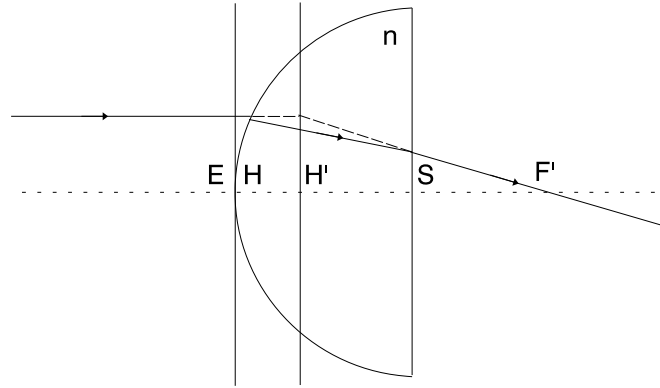
1- Formule de Gullstrand

Considérons 2 lentilles L_1 suivie de L_2 et séparées par une distance e dans l'air, la matrice associée est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f'_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & e \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f'_1 & 1 \end{pmatrix}$$

La vergence de la matrice résultante vaut : $V=V_1+V_2-eV_1V_2$. Nous retrouvons la formule de Gullstrand : $V=V_1+V_2-(e/n)V_1V_2$

2 - Demi-lentille boule



Considérons le système de la demi-lentille boule. Le produit des matrices correspond à la face plate de sortie, la matrice déplacement et la matrice associée au dioptre sphérique d'entrée

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & e/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{n-1}{R} & 1 \end{pmatrix}$$

Pour une lentille de verre ($n=1,5$), de rayon de courbure 3 cm, nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0,03/1,5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0,5/0,03 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,667 & 0,02 \\ -16,667 & 1 \end{pmatrix}$$

D'où :

$$V=16,67 \delta$$

$$f^*=0,06 \text{ m}$$

$$f^*=-0,06 \text{ m}$$

$$\overline{SF'}=f^*a=0,04 \text{ m}$$

$$\overline{EF}=fd=-0,06 \text{ m}$$

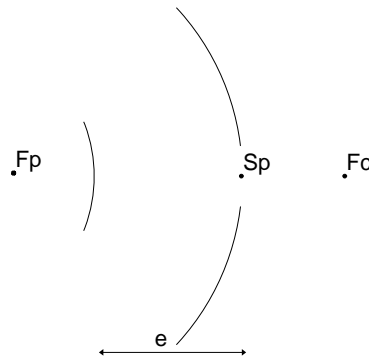
$$\overline{SH'}=f^*(a-1)=-0,02 \text{ m}$$

$$\overline{EH}=f(d-1)=0 \text{ m}$$

$$\overline{H'N'}=\overline{HN}=f+f^*=0 \text{ m}$$

Il est aussi possible de tracer le parcours réel du rayon lumineux.

3 - Télescope Cassegrain



Le foyer principal et le foyer secondaire sont représentés par P et S. La focale des miroirs est donnée par $f' = \frac{-R}{2}$ et la vergence par $1/f'$.

La matrice de transfert de l'objectif du télescope Cassegrain est :

$T(S_p S_s) = R(S_s) T(S_p S_s) R(S_p)$ soit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -V_s & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & e \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -V_p & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - eV_p & e \\ -(V_p + V_s - eV_p V_s) & 1 - eV_s \end{pmatrix}$$

Avec $R_p = 19,972$ m, $e = 8,814$ m et $R_s = 4,465$ m,

cette matrice vaut numériquement : $\begin{pmatrix} 0,18045 & 8,8140 \\ -0,01931 & 4,6666 \end{pmatrix}$ d'où :

$V = 0,01931 \delta$; $f' = 51,787$ m, $\overline{SF'} = f'a = 9,345$ m et $\overline{S_p F'} = 9,345 - 8,184 = 1,16$ m

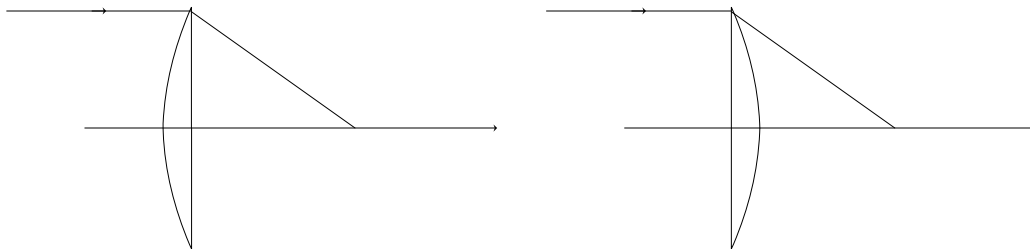
Exercice 12 – Systèmes centrés

Considérons une lentille épaisse constituée d'une face de rayon de courbure 10 cm et d'une face plate, les deux faces étant distantes sur l'axe optique de 1cm. L'indice du verre est de 1,5.

1 - Calculer les éléments cardinaux et les placer sur une figure (échelle 1/4).

2 - Tracer les rayons permettant de construire l'image pour un objet situé à 10 cm en amont de la face sphérique.

3 - Hors approximation de Gauss, tracer des rayons correspondants à la hauteur maximale de la lentille, soit un angle de 25° par rapport à la normale de la surface pour les 2 orientations de la lentille (voir schémas) et déterminer les intersections avec l'axe. A partir de vos calculs et des résultats précédents, indiquer quelle orientation permet de réduire les aberrations de sphéricité.



Photométrie

La définition de l'intensité et de l'éclairement permet de préciser le vocabulaire et d'éviter des mauvaises habitudes sachant qu'elles ont la vie dure Dans la partie ondulatoire, on gardera la lettre I utilisée dans les publications internationales en préférant le terme d'éclairement à celui d'intensité.

I Notion d'angle solide

L'angle solide d'un cône correspond au rapport $\Omega = S/R^2$, S étant l'aire que découpe le cône avec une sphère de rayon R dont le centre est à son sommet.

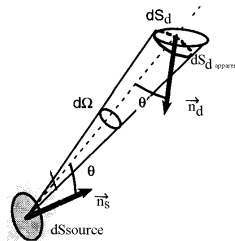
Ω est évalué en stéradians (sr).

L'angle solide correspondant à tout l'espace autour d'un point vaut 4π sr.

L'angle solide d'un cône de révolution dont le demi-angle au sommet est α vaut :

$$\Omega = 2\pi(1 - \cos(\alpha)) \text{ sr.}$$

Pour un détecteur de surface dS_d , l'angle solide $d\Omega = dS_{d, \text{ apparent}}/d^2$. Dans la suite, on supposera que la normale à la surface est selon la direction de propagation de l'énergie lumineuse.



II Grandeurs énergétiques

1 - Flux énergétique

Dans le langage usuel, le flux représente souvent le flux surfacique qui a pour unité le $W.m^{-2}$, le flux surfacique énergétique reçu par la terre de la part du soleil est de l'ordre de $0,5 kW.m^{-2}$.

Le flux énergétique Φ_E est la quantité d'énergie électromagnétique transportée par unité de temps et s'exprime en $W (J.s^{-1})$.

2 - Flux spectrique

La répartition spectrale du flux énergétique sur un intervalle $[\lambda; \lambda + d\lambda]$ est notée $\varphi(\lambda)$ et s'appelle flux spectrique.

En intégrant sur l'ensemble des longueurs d'onde, on obtient le flux énergétique :

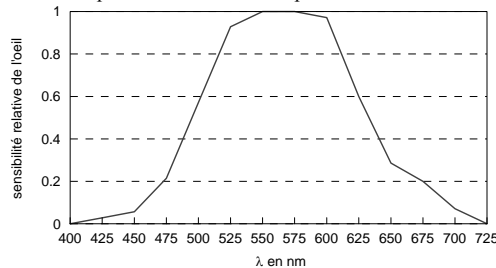
$$\Phi_E = \int \varphi(\lambda) d\lambda$$

III Grandeurs visuelles

Afin de tenir compte de la réponse spectrale (ou sensibilité spectrale) de l'oeil, les grandeurs visuelles ont été introduites.

1 - Sensibilité spectrale de l'oeil

La fonction $V(\lambda)$ représenté ci-dessous représente la sensibilité spectrale normée en vision diurne. $V(\lambda)=1$ pour $\lambda=555$ nm.



2 - Flux lumineux ou visuel

Pour passer d'un flux énergétique à un flux lumineux ou visuel, Φ_V , il faut tenir compte de la réponse spectrale de l'oeil :

$$\Phi_V = K \int V(\lambda) \varphi(\lambda) d\lambda$$

La grandeur visuelle a pour unité le lumen (lm). La constante K, égale à 683 lm.W^{-1} , a été choisi pour permettre de travailler avec des chiffres sympatiques (en fait, l'ancienne définition faisait intervenir un corps noir, d'où cette valeur particulière).

3 - Intensité lumineuse

C'est le flux lumineux par unité d'angle solide autour d'une direction donnée :

$$I = \frac{d\Phi_v}{d\Omega}$$

Elle s'exprime en candela (cd)

La candela est l'unité de base du système international d'unité pour la photométrie visuelle. La candela est l'intensité lumineuse pour une direction donnée, d'une source monochromatique de fréquence $5,4 \cdot 10^{14}$ Hz et dont l'intensité énergétique dans cette direction est de $1/683 \text{ W}\cdot\text{sr}^{-1}$.

4 - Eclairage lumineux

Le niveau d'éclairage lumineux est le flux lumineux tombant sur une surface apparente dS_d dans le cas d'un détecteur :

$$E = \frac{d\Phi_v}{dS_d}$$

L'unité de mesure est le lux (lx) et est équivalent à des $\text{lm}\cdot\text{m}^{-2}$. Un luxmètre est constitué d'un filtre et d'une photodiode ayant une réponse spectrale normée similaire à la sensibilité spectrale de l'œil normée.

5 - Luminance

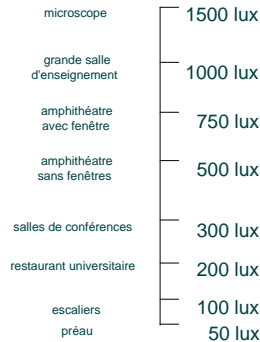
La luminance est une grandeur caractéristique de la source ou d'un plan réfléchissant. Elle quantifie la sensation visuelle que perçoit l'œil humain d'un plan éclairé ou d'une source lumineuse. La luminance est défini comme le rapport entre l'intensité lumineuse émise par unité d'aire apparente.

$$L = \frac{d\Phi_v}{dS_{s,\text{apparent}}}$$

L'unité est le $\text{cd}\cdot\text{m}^{-2}$.

La luminance minimale détectable par l'œil est de $0,00001 \text{ cd}\cdot\text{m}^{-2}$, au delà de $5000 \text{ cd}\cdot\text{m}^{-2}$, la vision est gênée.

6 - Ordre de grandeur des niveaux d'éclairage



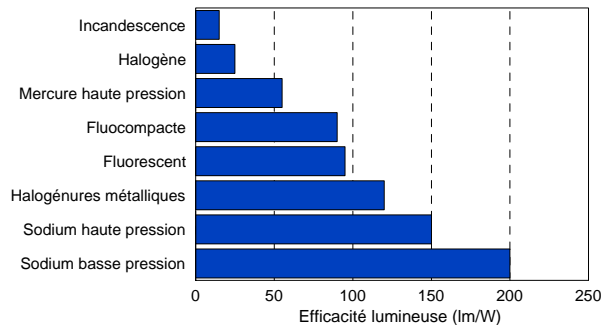
IV - Lampe - Efficacité lumineuse

L'efficacité lumineuse, F , d'une lampe est défini comme le rapport entre le flux lumineux (en lumen) et la puissance consommée (en W) :

$$F = \frac{\Phi_{v,\text{totale}}}{P_w}$$

L'efficacité lumineuse permet de caractériser la conversion de la puissance électrique en photon utile. En effet, toute la puissance électrique n'est pas convertie en lumière visible, une partie est perdue en échauffement, l'autre en rayonnement dans une gamme d'énergie inutile.

Dans le graphe ci dessous sont représenté les efficacité lumineuse pour différents types de lampes.



Il existe d'autre notion pour caractériser les lampes :

- IRC ou Ra : c'est l'indice de rendu des couleurs : il indique la capacité d'une lampe à rendre les différentes couleurs des objets qu'elle éclaire. Doit être supérieur à 80 %.
- Point de couleur : correspond à la proportion de bleu, vert et rouge
- Température de couleur : en référence à la loi de déplacement de Wien : $\lambda T \approx 3000 \text{ K}\cdot\mu\text{m}$

V - Sensibilité d'un détecteurs

Le choix d'un détecteur nécessite de connaître les caractéristiques suivantes :

- bruit (lecture, intrinsèque, lié à l'éclairage)

- courant d'obscurité : dans une photodiode en première approximation par exemple : $I = I_0 \left(e^{\frac{qV}{kT}} - 1 \right) - I_{\text{photogénéré}}$, en inverse, il reste toujours un courant I_0 .
- efficacité quantique : nombre utile de photons / nombre total de photons.
- temps de réponse :

Détecteur	Temps de réponse (s)
Cellule à vide	10^{-10}
Photodiode	10^{-5}
Photo-transistor	10^{-3}
Photo-multiplicateur	10^{-9}
Photorésistance sous 5V	10^{-2}

- NEP : puissance équivalente de bruit.
Afin d'avoir un paramètre caractérisant la limite de détection du détecteur, la quantité suivante a été introduite :

$$NEP = \frac{d\Phi_E}{\frac{\text{signal}}{\text{bruit}} \sqrt{\Delta f}}$$

comme le rapport signal sur bruit a une dépendance en $1/\sqrt{\Delta f}$, le dénominateur permet d'avoir une quantité variant peu. La bande passante Δf est fixée par l'utilisateur à l'aide de l'électronique associé. Si l'amplificateur a une bande passante de 10 Hz, alors on prendra cette valeur pour le calcul.

- linéarité
- réponse spectrale
- sensibilité : définie ensuite
- prix et l'encombrement

1 - Sensibilité d'un détecteur

La sensibilité Σ d'un détecteur est défini comme le rapport :

$$\Sigma = \frac{\text{grandeur électrique utile}}{d\Phi_{E, \text{reçu}}}$$

La réponse spectrale ou sensibilité spectrale est la valeur de ce rapport pour un flux monochromatique de longueur d'onde λ . De la même façon que pour le flux énergétique, on définit une sensibilité à un flux lumineux par :

$$\Sigma = \frac{\text{grandeur électrique utile}}{d\Phi_{V, \text{reçu}}}$$

Nous ne nous intéresserons qu'au détecteur délivrant un courant :

$$\Sigma = \frac{i_{\text{photogénéré}}}{d\Phi_{V, \text{reçu}}}$$

Si l'on introduit la surface du détecteur, on obtient :

$$\Sigma = \frac{i}{dS_d \frac{d\Phi_V}{dS_d}} = \frac{i}{dS_d E}$$

2- Ordre de grandeurs

Détecteur	Surface (m ²)	Sensibilité typique
Cellule à vide	$2.5 \cdot 10^{-4}$	20-200 $\mu\text{A/lm}$
Photodiode	$6 \cdot 10^{-6}$	20-1000 mA/lm
Photo-transistor	$10 \times 0.5 \cdot 10^{-6}$	0.1-10 A/lm
Photo-multiplicateur	$20 \cdot 10^{-4}$	1-100 A/lm
Photorésistance sous 5V	$0.5 \cdot 10^{-4}$	grande

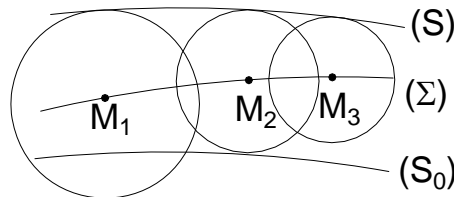
Diffraction

L'optique géométrique permet la description de nombreux phénomènes lumineux, cependant, il est souvent nécessaire de revenir à une description ondulatoire de la lumière. L'amplitude de l'onde ne dépend pas uniquement de la nature locale du milieu mais aussi des conditions aux limites (obstacles, limitations spatiales), c'est le phénomène de diffraction. Lorsque deux ondes se superposent, ce sont les amplitudes complexes qui s'ajoutent, et non pas directement l'énergie. Pour des ondes cohérentes, l'éclairement est modulé spatialement : c'est le phénomène d'interférence. C'est ces phénomènes que nous allons maintenant aborder. En effet, jusqu'à maintenant, nous avons considéré les dimensions telles qu'aucun éparpillement de lumière n'avait lieu : chaque rayon lumineux avait une trajectoire bien définie.

I – Principe de Huygens-Fresnel

1 – Enoncé historique de Huygens (1678)

Tout point de l'espace atteint par une onde se comporte comme une source d'ondes secondaires ; les points M_1, M_2, \dots d'une surface (Σ) étant atteints par une surface d'onde (S_0) qui se propage aux instants t_1, t_2, \dots , cette surface d'onde (S) à l'instant ultérieur t est, en milieu homogène, l'enveloppe des ondelettes sphériques de centres M_1, M_2, \dots et de rayons $\frac{c}{n}(t-t_1), \frac{c}{n}(t-t_2) \dots$



2 – Enoncé de Huygens Fresnel (1808)

Le principe de Huygens a été repris par Fresnel suite à un concours de l'académie des sciences en 1808. Il a ajouté le principe d'interférences entre les ondelettes (par l'introduction de la phase).

La grandeur lumineuse, en un point P situé après une surface atteinte par une onde monochromatique incidente est la somme des grandeurs lumineuses en P des ondelettes sphériques qui seraient émises par tous les éléments de la surface diffractante ; l'ondelette fictive due à un élément infinitésimal de la surface a une amplitude proportionnelle à son aire, proportionnelle à l'amplitude de l'onde juste après l'obstacle diffractant et en phase avec elle.

Quelques remarques concernant sa validité :

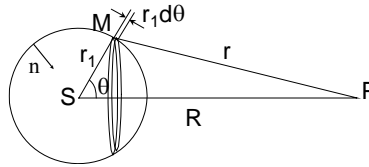
- le principe de Huygens-Fresnel présuppose l'approximation scalaire, qui n'est plus valable quand l'objet diffractant a les dimensions de la longueur d'onde.
- Le facteur d'inclinaison n'est pas présent mais on ne s'intéresse qu'au petit angle.
- La phase de l'onde fictive n'est pas en phase mais en quadrature avance juste après l'objet diffractant mais ce n'a aucun effet sur l'éclairement de la figure de diffraction.
- Ce principe n'est valable que pour des points d'observation situés à une distance de la surface diffractante grande devant la longueur d'onde.

3 – Formulation mathématique (théorie de Kirchhoff de la diffraction)

Les ondelettes d'Huygens Fresnel ne sont qu'un artifice de calcul. C'est une solution approchée de l'équation de propagation de Helmholtz $(\nabla^2 + k^2)\varphi = 0$ avec $\Psi(r,t) = \varphi(r)e^{-i\omega t}$ et $k = \omega/c$. Soit une onde sphérique émise par une source ponctuelle, $\Psi(r,t)$, à partir du théorème de Green, on montre que l'expression mathématique à grande distance est donnée par :

$$\Psi = \int \frac{A}{i2\lambda r_1} e^{i[k(r+r_1) - \omega t]} [\cos(\vec{n}, \vec{r}) - \cos(\vec{n}, \vec{r}_1)] dS$$

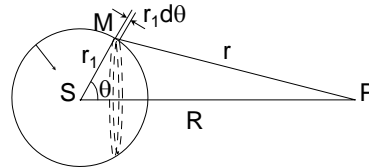
L'intégration porte sur toute la surface entourant le point d'émission.



Le facteur i est essentiel pour avoir la bonne phase, \vec{n} est la normale à la surface orientée toujours vers la source, $S\vec{M}=\vec{r}_1$ et $\vec{P}M=\vec{r}$. L'intégration porte sur toute la surface considérée. Le facteur contenant les cosinus permet aux ondelettes de dépendre de l'angle. Si SMP sont alignés, le terme entre crochets vaut 2 si P est au-delà de M et 0 s'il est en deçà. Ainsi, il n'y a pas le problème avec l'onde retour. Souvent des expressions simplifiées de celle-ci sont données dans la littérature. Cette formule de diffraction est celle de Fresnel-Kirchhoff.

4 - Equivalence

Considérons l'onde sphérique émise par une source S et qui parvient au point P : $\Psi = \frac{Ae^{i(kR-\alpha t)}}{R}$. Cherchons à partir de notre formulation mathématique l'expression de ψ due à une sphère centrée sur S.



D'après notre orientation de \vec{n} , $\cos(\vec{n}, \vec{r}_1)$ vaut -1 , de plus, r_1 est constant. La formule devient donc :

$$\Psi = \frac{A}{i2\lambda r_1} e^{i[k(r_1) - \alpha t]} \int \frac{1}{r} e^{ikr} [\cos(\vec{n}, \vec{r}) + 1] dS$$

Pour calculer cette intégrale, du fait de la symétrie de révolution, considérons des anneaux de surface $2\pi r_1^2 \sin(\theta) d\theta$. En différenciant $r^2 = R^2 + r_1^2 - 2Rr_1 \cos(\theta)$, on obtient $2r dr = 2Rr_1 \sin(\theta) d\theta$ conduisant à :

$$\Psi = \frac{\pi A}{i\lambda R} e^{i[k(r_1) - \alpha t]} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} e^{ikr} [\cos(\vec{n}, \vec{r}) + 1] dr \text{ avec } r_{\min}=R-r_1 \text{ et } r_{\max}=R+r_1.$$

Pour réaliser cette intégration, nous allons nous servir de la technique des zones de Fresnel, donnant le résultat de manière approchée mais simple. Partons de la valeur r_{\min} et augmentons r par intervalle de $\lambda/2$, chacune des sommes est de signe opposé et très proche en valeur absolue, que nous noterons s_n , du fait de leur très lente variation. Regroupons les termes comme suit :

$$\frac{s_1}{2} + \left(\frac{s_1}{2} - s_2 + \frac{s_3}{2} \right) + \dots + \left(\frac{s_{n-2}}{2} - s_{n-1} + \frac{s_n}{2} \right) + \frac{s_n}{2}$$

Du fait de la lente variation des termes s_n , nous avons pratiquement : $s_k = \frac{s_{k-1} + s_{k+1}}{2}$. Il ne reste alors que les deux termes extrêmes. Dans la première zone, $\cos(\vec{n}, \vec{r})+1$ vaut pratiquement 2 alors que pour la dernière zone, il est pratiquement nul. Il vient alors :

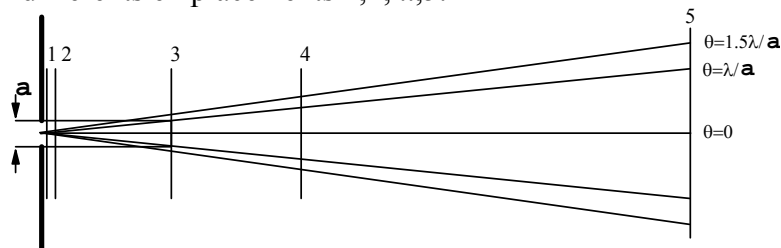
$$\Psi = \frac{\pi A}{i\lambda R} e^{i[kr_1 - \alpha t]} \int_{R-r_1}^{R-r_1 + \lambda/2} e^{ikr} dr$$

donnant finalement :

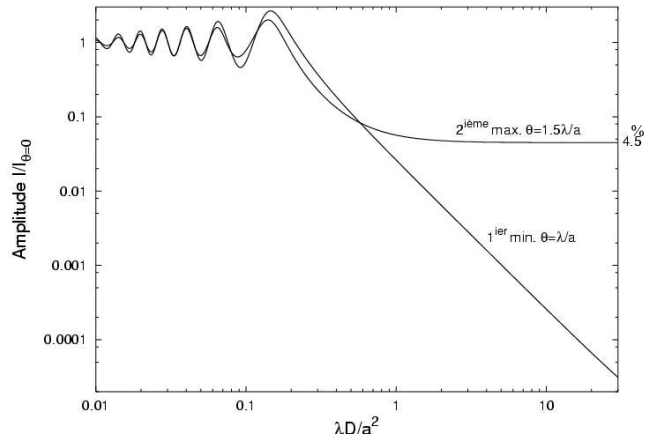
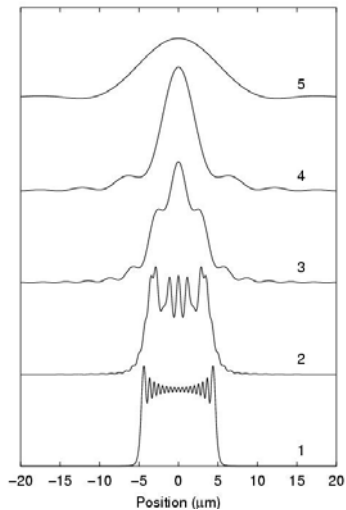
$$\Psi = \frac{Ae^{i(kR-\alpha t)}}{R}$$

II - Diffraction de Fresnel et de Fraunhofer

Considérons une fente de largeur a éclairée par une source ponctuelle monochromatique placée à l'infini. Après la fente, nous observons la répartition de l'éclairement aux différents emplacements 1,2, ...,5.



Nous avons choisi $a=10\mu\text{m}$ et $\lambda=0,5 \mu\text{m}$. La métrique selon x et z est la même sur la figure.



Nous observons juste après la fente l'image projetée de celle-ci avec des oscillations (que nous appellerons franges) de période proche de λ . C'est le phénomène de diffraction de Fresnel. Au fur et à mesure qu'on s'éloigne, la taille des franges croît. En 5, la figure de diffraction ne ressemble plus du tout à la fente, nous sommes dans la situation de Fraunhofer. L'angle caractéristique de la diffraction est :

$$\theta = \frac{\lambda}{a}$$

La situation de Fraunhofer est l'observation de la figure de diffraction à une distance D grande devant :

$$\frac{\pi a^2}{\lambda}$$

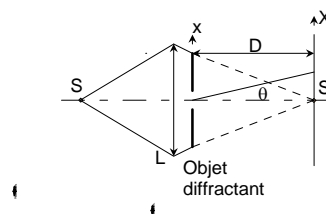
appelé longueur de Rayleigh. Cette distance est fondamentale dans le cas des lasers qui émettent selon des modes gaussiens.

III – Montages expérimentaux

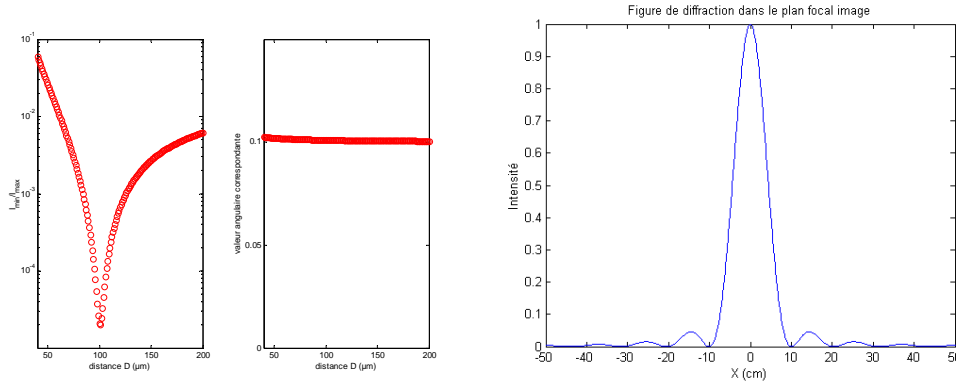
Plusieurs configurations importantes permettent d'observer la diffraction dans l'approximation de Fraunhofer. Soit nous choisissons une distance D tel que $\lambda D/a^2$ soit très grand devant 1, soit nous ramenons la figure de diffraction de l'infini dans le plan focal image d'une lentille. Il existe deux montages standards, utilisant une ou deux lentilles.

1 - Montage à 1 lentille

La configuration la plus simple est la suivante : un objet diffractant est positionné après la lentille. Pour généraliser la discussion, nous avons pris un objet loin de la lentille. L'image géométrique de S se forme en S'. La figure de diffraction se localise parfaitement au niveau de l'image géométrique comme cela est reporté sur la page suivante. La figure de diffraction qui se trouve alors centrée autour de l'image géométrique de la source. L'angle θ vaut X/D .



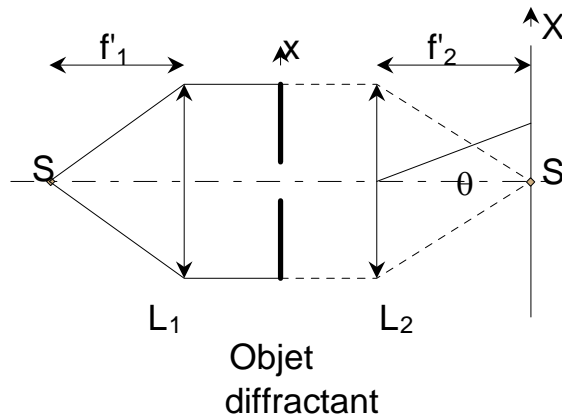
Pour le calcul, nous avons simplement considéré la formulation exacte, c'est à dire à 2 dimensions un arc de cercle qui émet des ondelettes avec les coefficients appropriés.



Modélisation avec $a=10\mu\text{m}$. L'angle $\theta=\lambda/a=0,1$ correspond au minimum. Si la fente est avant la lentille, c'est la distance f' qui intervient. Si la fente est après, c'est la distance de la fente à l'écran qui doit être utilisée.

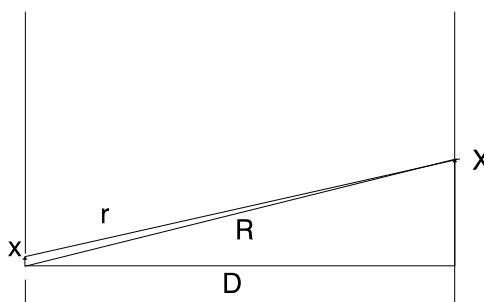
2 - Montage à 2 lentilles

La source S et l'écran sont à l'infini. L'objet diffractant est éclairé par une onde plane et on observe à l'infini une onde plane diffractée dans une direction donnée. L'angle θ vaut X/f_2 .



IV – Caractéristiques de la diffraction

1 – Cas d'une fente



L'abscisse x représente la coordonnée dans le plan de l'objet diffractant, X la coordonnée dans le plan à l'infini. Nous supposons aussi l'invariance par translation selon y . Nous venons de voir que l'essentiel de la figure de diffraction revient à évaluer l'intégrale :

$$\int e^{ik(r+r_1)} ds$$

Où $k=2\pi/\lambda$ et où l'intégration porte sur l'ouverture de l'obstacle plan, c'est à dire de l'objet diffractant. La lentille transforme l'onde sphérique en une onde plane. Nous n'avons pas à prendre en considération r_1 . Ignorons la lentille dans un premier temps. Soit r la distance entre M et P :

$$r = \sqrt{D^2 + (X - x)^2} = \sqrt{D^2 + X^2 + x^2 - 2xX} = \sqrt{R^2 + x^2 - 2xX}$$

En effectuant un développement ($R \gg X \gg x$) :

$$r \approx R - \frac{xX}{R} = R - \vec{e}_{OP} \cdot O\vec{M}$$

La seconde expression nous servira dans le cas des réseaux. Pour les petits angles, $\alpha=X/R$, conduisant à évaluer :

$$\int_{-a/2}^{a/2} e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(R-x\alpha)} dx$$

En posant $u=\alpha/\lambda$, fréquence spatiale, nous faisons apparaître une transformée de Fourier :

$$\Psi(u) = A \int_{-a/2}^{a/2} e^{-i2\pi ux} dx$$

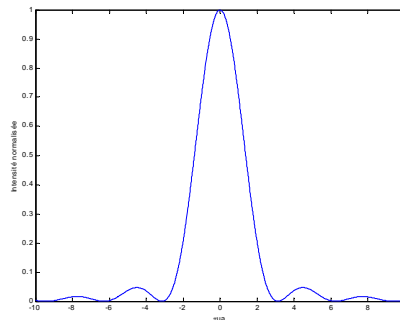
Donnant dans notre cas :

$$\Psi = A \frac{e^{-i\pi ua} - e^{i\pi ua}}{-i2\pi u} = Aa \frac{\sin(\pi ua)}{\pi ua}$$

L'éclairement s'obtient en calculant :

$$I(u) = \Psi^*(u)\Psi(u) = |Aa|^2 \left(\frac{\sin(\pi ua)}{\pi ua} \right)^2$$

La courbe suivante représente le profil d'éclairement en fonction de πua .



L'interfrange de diffraction est la distance qui sépare deux minima n'incluant pas $u=0$. i_d correspond à $ua=1$, soit $u=1/a$. Du fait de la présence de la lentille, α vaut maintenant X/f^2 , donnant $X/(\lambda f^2)=1/a$ soit $X=i_d=\lambda f^2/a$.

En $u=0$, $\sin(\pi ua)/(\pi ua)$ tend vers 1. Pour $u=1,43$ on a $I/I_0=4,7\%$ et pour $u=2,46$ on a $I/I_0=1,65\%$.

2 – Calcul dans le cas général

En posant $u=\alpha/\lambda$, fréquence spatiale, nous devons calculer l'amplitude complexe en fonction de u d'une intégrale qui porte sur la surface de l'objet diffractant :

$$\Psi(u) = A \int_{\text{ouverture_diffractante}} e^{-i2\pi ux} dx$$

Le principe de Huygens Fresnel peut facilement s'appliquer au cas de 2 fentes de largeur a et distante de p :

$$\Psi(u) = A \int_{-p/2-a/2}^{-p/2+a/2} e^{-i2\pi ux} dx + A \int_{p/2-a/2}^{p/2+a/2} e^{-i2\pi ux} dx = A(e^{i\pi up} + e^{-i\pi up}) \int_{-a/2}^{a/2} e^{-i2\pi ux} dx = 2A \cos(\pi up) a \frac{\sin(\pi ua)}{\pi ua}$$

d'où :

$$I(u) = \Psi^*(u)\Psi(u) = |2Aa|^2 \cos^2(\pi up) \left(\frac{\sin(\pi ua)}{\pi ua} \right)^2$$

La représentation graphique fait apparaître l'interfrange de diffraction i_d ($u=1/a$) et l'interfrange d'interférence i_i ($u=1/p$) qui dans un montage avec une lentille et un plan d'onde arrivant sur l'objet diffractant s'exprime selon $i_d=\lambda f^2/a$ et $i_i=\lambda f^2/p$.

3 – Transmittance

Soit t la transmittance d'une ouverture, qui est défini par le rapport des amplitudes complexes avant et après l'ouverture :

$$t(x, y) = \frac{\Psi^+(x, y)}{\Psi^-(x, y)}$$

En généralisant l'écriture obtenue précédemment, nous avons :

$$\Psi(u, v) = A \int t(x, y) e^{-i2\pi(ux+vy)} dx dy$$

Le calcul de la figure de diffraction est donc ramené au calcul de la transformée de Fourier de la transmittance.

Remarques :

Théorème de Babinet : deux objets complémentaires ont la même figure de diffraction sauf au voisinage immédiat du centre.

La translation de la fente diffractante dans son plan est sans effet sur la figure de diffraction (déphasage)

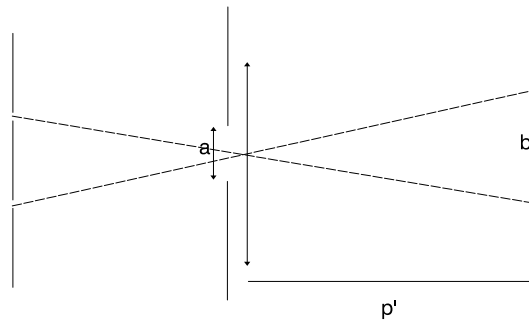
4 – Ouverture circulaire et pouvoir de résolution associée à une lentille

Le problème de la diffraction de Fraunhofer à travers une ouverture circulaire est un peu plus compliquée mathématiquement. Nous devons évaluer l'intégrale précédente sur un cercle. On montre que la transformée de Fourier d'un cercle de diamètre d_0 est relié à la fonction J_1 de Bessel d'ordre 1 par :

$$\Psi(u, v) = 2A \frac{J_1(\pi d_0 \sqrt{u^2 + v^2})}{(\pi d_0 \sqrt{u^2 + v^2})}$$

Le premier anneau noir a pour fréquence spatiale : $u=1.22/(d_0)$. Ces anneaux ne sont pas équidistants. L'image d'une source ponctuelle est un spot circulaire entouré de franges, figure de diffraction due à la seule présence de la lentille. Cette figure limite la résolution de la lentille. Deux images distantes de moins de $1,22\lambda D/a$ ne sont pas résolues. A travers le grandissement transversal, on peut remonter à la distance entre les objets sources supposés incohérents. Les détails de l'objet inférieurs à cette distance sont perdus !

5 – Limite de résolution : critère de Rayleigh



Les images ne peuvent être séparées que si le maximum de la figure de diffraction autour de l'image géométrique de l'une des fentes de l'objet, est situé au-delà du premier minimum de la figure de diffraction autour de l'image géométrique de l'autre fente de l'objet. Si p' est la distance de la lentille au plan focal image, le critère de Rayleigh s'écrit :

$$\frac{\lambda}{a} < \frac{b}{p'}$$

6 – Limite de résolution d'un télescope

Un télescope est un filtre passe bas. La limite de résolution peut être généralement estimée en considérant le premier miroir de diamètre Φ . L'angle limite observable vaut donc $1,22\lambda/\Phi$. Cet angle subit le grandissement angulaire à travers l'instrument. Par exemple, pour un télescope ayant un miroir principal de 20 cm, on a $1,22\lambda/\Phi=0,6 \cdot 10^{-6}/0,2=3 \cdot 10^{-6}$ rad. L'œil peut résoudre une minute d'arc ($2\pi/360/60=3 \cdot 10^{-4}$ rad). Le grossissement angulaire maximal avant d'être gêné par la diffraction vaut 100. Pour chaque surface ou diaphragme, il est possible d'y associer un angle. Il convient ensuite de voir si dans le plan d'observation, les conditions de diffractions correspondent à Fresnel ou Fraunhofer et ainsi d'en estimer l'importance.

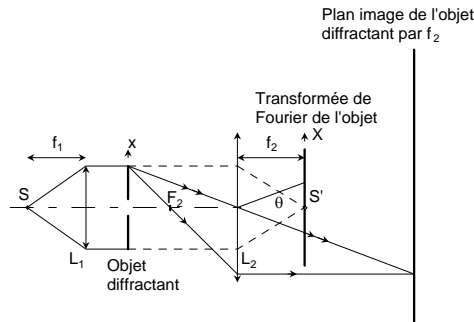
7 – Éviter les maxima secondaires

Si la lentille est recouverte d'un revêtement qui transmet de moins en moins la lumière au fur et à mesure que l'on se rapproche des bords, on va avoir une apodisation, c'est-à-dire un léger élargissement du pic principal et une disparition des maxima secondaires. En effet, le

bord ne sera plus visible. Ceci est très utilisé en astronomie pour voir des objets de faible luminosité au voisinage d'objet de forte luminosité. Le calcul s'effectue en utilisant une transmittance qui dépend de r .

V – Filtrage dans l'espace de Fourier

Considérons le montage suivant :



La source S est au foyer objet de la lentille L_1 qui transforme l'onde sphérique en une onde plane. L'objet diffractant peut être aussi bien un objet courant (aile de libellule) que la monture des lentilles. Le plan de focalisation de S est le plan de Fourier. En ajustant le diamètre du trou placé dans ce plan, on peut ne laisser passer que les basses fréquences spatiales (nettoyeur de faisceaux). En ajustant le diamètre du disque qui stoppe le faisceau proche de l'axe, on peut choisir de ne laisser passer que les fréquences intermédiaires (les hautes fréquences étant toujours perdues mais ayant un rôle négligeable pour notre application). Ainsi, on augmente considérablement le contraste et il est possible d'obtenir des images superbes de certains objets. C'est la strioscopie.

Exercice 13 - Diffraction

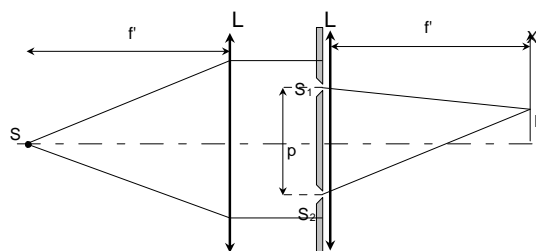
Considérons la pupille de l'œil, qui possède un diamètre que nous prendrons égal à 2 mm. Nous cherchons à savoir si la limite de diffraction est l'élément qui limite notre vision. Nous admettrons que la distance focale de l'œil vaut 3 cm (diamètre du globe oculaire) et prendrons le milieu n toujours égal à 1.

- 1 – Donner la longueur d'onde dans le visible.
- 2 – Donner l'angle puis l'interfrange de diffraction associé à l'œil (*il n'est pas utile d'avoir une grande précision, on considérera uniquement une limitation selon une direction*).
- 3 – Sachant qu'un homme est capable de distinguer un détail de 1 mm à 2 m, déterminer l'angle sous lequel est vu ce détail. Comparer à la valeur de la question 2. Conclure.
- 4 - Considérons maintenant un instrument optique (lunette d'astronomie). Quel lien existe-t-il entre le grossissement angulaire et le cercle oculaire ? Est-ce que la limite de résolution angulaire de l'œil est modifiée lorsqu'on utilise un instrument optique ?

Exercice 14 - Bifente d'Young

Considérons le dispositif des fentes d'Young. Deux fentes de largeur a sont distantes de p . La source S est monochromatique, de longueur d'onde $0,514 \mu\text{m}$.

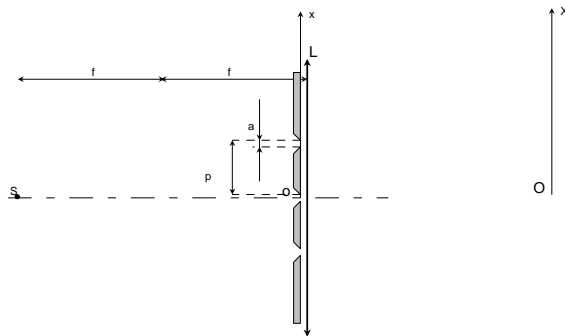
- 1 – Quel est le rôle de la lentille ?
- 2 – Donnez la fréquence, la période, la norme du vecteur d'onde et la pulsation associées à cette onde.
- 3 – Ecrire à partir du principe de Huygens-Fresnel l'éclairement dans le plan focal image.
- 4 – Que valent l'interfrange de diffraction et l'interfrange d'interférence en fonction de f , λ , a et p ?



Exercice 15 - Interférence et diffraction

Considérons le dispositif suivant composé de 3 fentes. Les trois fentes de largeur a sont équidistantes de p . La source S est monochromatique, de longueur d'onde $0,514 \mu\text{m}$. La lentille convergente est de focale 15 cm . La source est positionnée à 30 cm devant la lentille.

- 1 – Donnez la fréquence en THz associée à cette onde.
- 2 – Calculez la position de l'image de la source.
- 3 – Ecrivez à partir du principe de Huygens-Fresnel l'éclairement en fonction de la fréquence spatiale u puis en fonction de X dans le plan image.
- 4 – Esquissez le profil de l'éclairement dans le plan image en fonction de X .



- 5 – Donnez un autre schéma expérimental utilisant deux lentilles convergentes identiques de distance focale 15 cm .
- 6 Y a-t-il modification en fonction de u ? Et en fonction de X ?

Réseaux plans en optique

L'utilisation des réseaux dans les spectromètres a contribué à leur développement rapide. Nous aborderons ici les réseaux plans sachant qu'en pratique, il est judicieux d'utiliser des réseaux sphériques, qui permettent d'obtenir la figure de diffraction à la distance de formation de l'image.

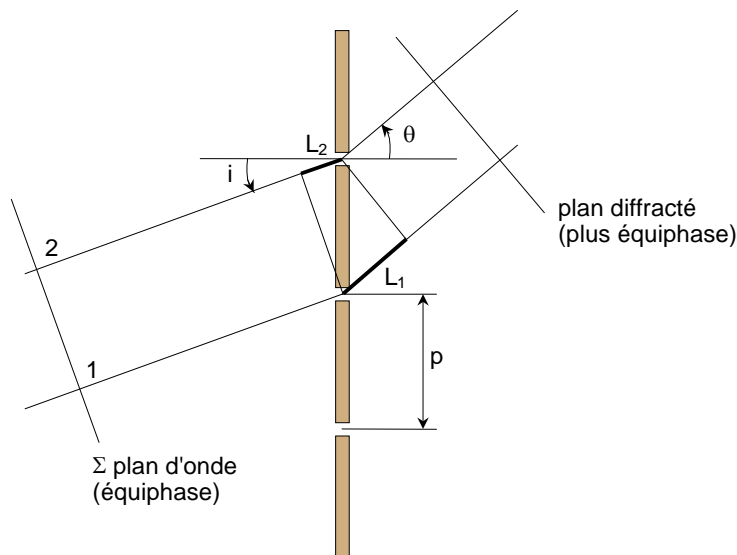
I – Approche simplifiée

1 – Définition

Un réseau est une structure périodique de motifs qui diffracte une onde incidente.

2 – Relation fondamentale

Considérons un réseau parfait (fentes infiniment fines),



La différence de chemin optique ΔL entre deux rayons lumineux 1 et 2 vaut :

$$\Delta L = L_2 - L_1 = p \sin(i) - p \sin(\theta) = p[\sin(i) - \sin(\theta)]$$

Pour avoir des interférences constructives entre tous les rayons diffractés, il est nécessaire qu'ils soient déphasés de modulo 2π :

$$\frac{2\pi}{\lambda} p[\sin(i) - \sin(\theta)] = 2\pi m$$

La relation fondamentale des réseaux est donc :

$$p[\sin(i) - \sin(\theta)] = m\lambda$$

où m est un entier relatif. Dans le cas des réseaux par réflexion, le signe $-$ est remplacé par un signe $+$.

3 – Réalisation

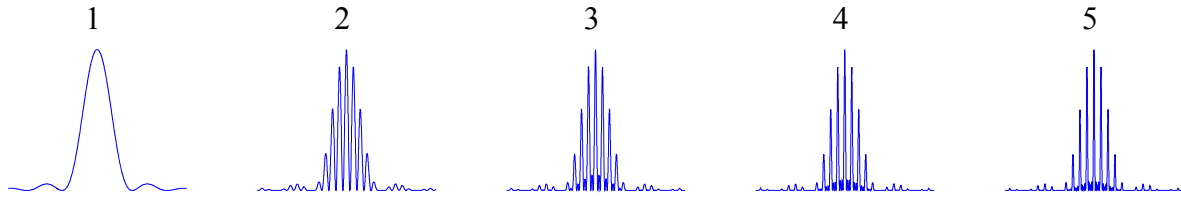
La plupart des spectromètres utilisent des réseaux comme éléments dispersifs. On obtient ces réseaux en traçant sur des surfaces métalliques planes des traits réguliers équidistants. Depuis l'apparition des lasers et du développement des techniques holographiques, on sait maintenant réaliser des réseaux parfaits. La plaque de résine photosensible enregistre les interférences de deux faisceaux cohérents de rayons. Les franges d'interférences sont des droites parallèles et équidistantes. Après développement, la couche de

résine montre une variation d'épaisseur. La couche se creuse d'autant plus que la lumière incidente est intense. Le réseau obtenu est donc un réseau de phase. Par évaporation dans le vide, on le recouvre d'une couche d'aluminium afin d'avoir un réseau par réflexion. Les établissements Jobin et Yvon ont été les premiers à réaliser des réseaux d'une qualité exceptionnelle, soit avec une surface plane, soit avec une surface sphérique concave.

II – Réseaux

1 – Principe (interférence à ondes multiples)

Considérons le dispositif des fentes d'Young et observons la figure de diffraction pour un nombre de fentes variant de 1 à 5 :



Lorsque le nombre de fentes augmente, on voit que les pics s'affinent et les maxima secondaires sont moins importants.

2 – Calcul de l'éclairement

Soit un ensemble de N fentes, numérotées de 0 à N-1. Chaque fente a une largeur a et est distante des fentes précédente et suivante de p, pas du réseau. Le principe de Huygens Fresnel nous permet d'écrire :

$$\Psi(u) = A \int t(x) e^{-i2\pi(ux)} dx$$

La variable u est fréquence spatiale qui s'exprime en fonction de θ et i :

$$u = \frac{\sin(\theta) - \sin(i)}{\lambda}$$

Du fait de la répétition du motif :

$$t(x) = \sum_{m=0}^{N-1} t_c(x - x_m)$$

En reportant dans $\Psi(u)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \Psi(u) &= A \sum_{m=0}^{N-1} e^{-i2\pi(ux_m)} \int_{\text{motif}} t_c(x') e^{-i2\pi(ux')} dx' = A \frac{1 - e^{-i2\pi Np}}{1 - e^{-i2\pi p}} \int_{\text{motif}} t_c(x') e^{-i2\pi(ux')} dx' \\ &= A' N \frac{\sin(N\pi up)}{N \sin(\pi up)} \int_{\text{motif}} t_c(x') e^{-i2\pi(ux')} dx' \end{aligned}$$

Le motif peut avoir différentes formes, les plus courantes sont :

- simple fente de largeur a conduisant à : $\int_{\text{motif}} t_c(x') e^{-i2\pi(ux')} dx' = a \frac{\sin(\pi ua)}{\pi ua}$
- déphasage linéaire avec la distance :

$$\int_{\text{motif}} t_c(x') e^{-i2\pi(ux')} dx' = \int_{-a/2}^{a/2} e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(\eta x')} e^{-i2\pi(ux')} dx' = a \frac{\sin\left(\pi\left(u - \frac{\eta}{\lambda}\right)a\right)}{\pi\left(u - \frac{\eta}{\lambda}\right)a}$$

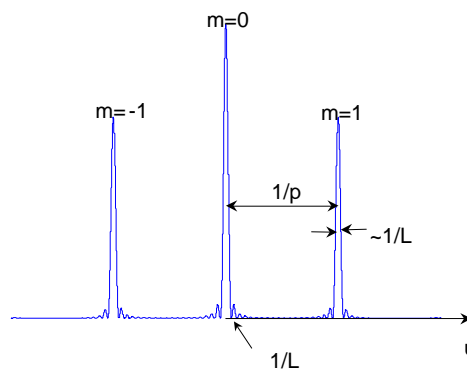
Le second type de déphase est utilisé dans les réseaux à réflexion pour concentrer l'éclairement sur un des ordres.

3 – Répartition de l'éclairement

L'éclairement est obtenu, pour une fente de largeur a , par :

$$I = \Psi^*(u)\Psi(u) = A^2 N^2 a^2 \left(\frac{\sin(N\pi u p)}{N \sin(\pi u p)} \right)^2 \left(\frac{\sin(\pi u a)}{\pi u a} \right)^2$$

Le premier terme entre parenthèses est la fonction réseau, le second correspond à l'onde diffractée par une fente seule de largeur a . L'éclairement est donc le produit de ces deux fonctions et est représenté ci-après pour le cas où a est très petit (enveloppe très large). La finesse des pics est approximativement $1/L$ où L est la largeur du réseau. $1/L$ représente exactement la distance entre le maximum et le premier zéro.



4 – Pouvoir de résolution

Il existe plusieurs paramètres caractérisant les réseaux (minimum de déviation à $i=-\theta$, ...), dont le principal est le pouvoir de résolution :

$$P.R. = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$$

En différentiant la relation des réseaux pour un ordre fixé :

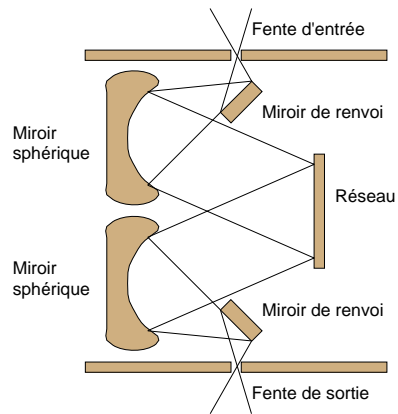
$$\frac{d(\sin(\theta) - \sin(i))}{\lambda} + (\sin(\theta) - \sin(i)) \frac{-d\lambda}{\lambda^2} = 0$$

on obtient une relation entre $d\theta$ et $d\lambda$. D'après notre étude précédente, à λ fixé, la largeur $\Delta u = 1/L = \cos(\theta)d\theta/\lambda$. Cette relation provient bien évidemment du critère de Rayleigh. A partir de ces deux relations, on obtient :

$$P.R. = \frac{\sin(\theta) - \sin(i)}{\cos(\theta)\Delta\theta} = \frac{L}{\lambda} \frac{m\lambda}{p} = m \frac{L}{p} = mN$$

L est la largeur du réseau. N est le nombre de traits éclairés.

5 – Spectromètre



Un spectromètre est composé de plusieurs éléments :

- une fente d'entrée,
- un ensemble de réseaux couplés (simple, double, triple)
- une fente de sortie associée à un CCD.

Interférence à 2 ondes

I - Obtention d'interférence

1 - Définition

On dit qu'il y a interférence lorsque l'éclairement résultant de la superposition de 2 ou plusieurs ondes n'est pas la somme de leurs éclaircissements pris séparément. A partir du champ électromagnétique, nous avons vu au début du cours que :

$$I = n|\vec{E}|^2$$

Considérons 2 ondes planes, leurs champs s'ajoutent : $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ avec pour le premier champ : $\vec{E}_1 = \vec{e}_1 \exp(-i\omega_1 t + i\varphi_1)$ et $\varphi_1 = \vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1 + \Phi_1$, conduisant à :

$$I = I_1 + I_2 + 2\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 \sqrt{I_1 I_2} \cos[-(\omega_2 - \omega_1)t + \varphi_2 - \varphi_1]$$

Le dernier terme est le terme d'interférence. Le dernier terme a une moyenne temporelle non nulle si l'argument du cosinus reste constant dans le temps à l'échelle de temps du détecteur. Les temps caractéristiques sont les suivants : lumière visible : 10^{-14} s et œil : 10^{-1} s. Il faut donc que les deux pulsations soient égales. Pour des intensités identiques I_0 , on a donc :

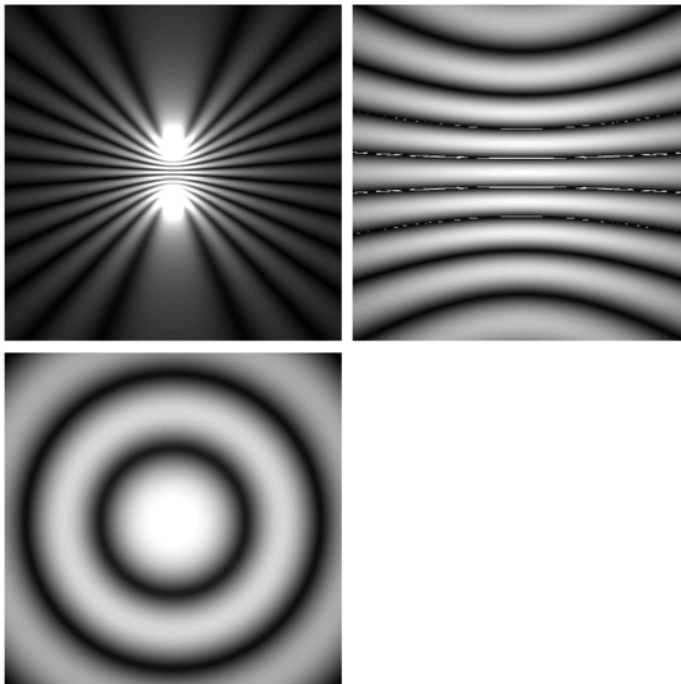
$$I = I_0 (2 + 2 \cos(k\Delta r + \Delta\Phi)) = 4 \cos^2\left(\frac{k\Delta r + \Delta\Phi}{2}\right)$$

Nous verrons dans le prochain chapitre le non respect stricte de cette condition. L'observation de la figure d'interférence est caractérisée par le **facteur de visibilité V** des franges :

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$

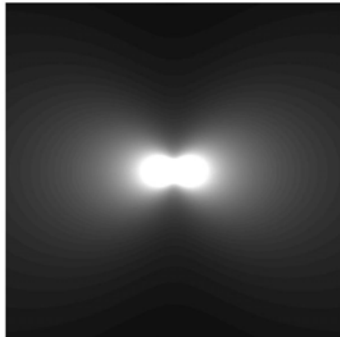
2 - Ondes sphériques de même amplitude

Considérons 2 onde sphériques isochrones de même amplitude, les graphes ci dessous sont des coupes de l'espace. Les deux sources sont distantes de 6λ .

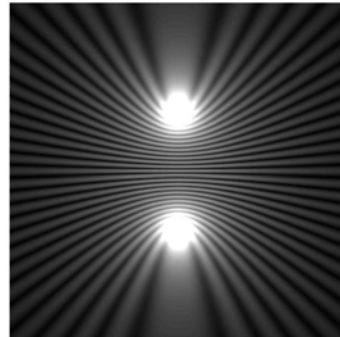


Si la distance inter-sources varie, le nombre d'hyperboloïdes de révolution varie aussi.

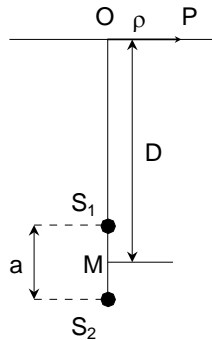
Sources distantes de 0.4λ



Sources distantes de 14λ



a – Observation dans un plan perpendiculaire à la droite des sources



Pour des raisons de lisibilité des formules, nous gardons a comme distance inter-sources et reprendrons p dès que possible par rapport à la dernière partie sur les réseaux. Les franges sont l'intersection des hyperboloïdes avec un plan, c'est à dire des sections circulaires d'hyperboloïdes. Pour calculer l'éclairement d'un point P dans ce plan, en prenant r_1 la distance de P avec la première source et r_2 la distance de P avec la seconde source. Si D désigne la distance inter-source au plan et ρ est la coordonnée de P dans le plan, nous avons :

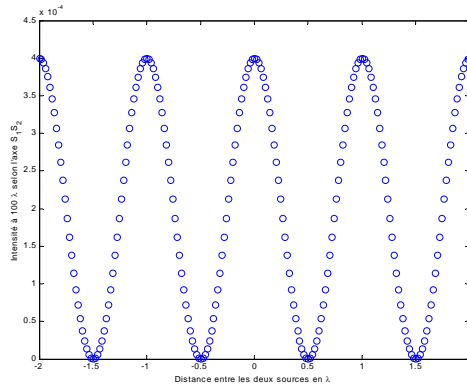
$$r_1 = \left[\left(D - \frac{a}{2} \right)^2 + \rho^2 \right]^{1/2} \approx \left(D - \frac{a}{2} \right) + \frac{\rho^2}{2 \left(D - \frac{a}{2} \right)} \text{ et}$$

$$r_2 = \left[\left(D + \frac{a}{2} \right)^2 + \rho^2 \right]^{1/2} \approx \left(D + \frac{a}{2} \right) + \frac{\rho^2}{2 \left(D + \frac{a}{2} \right)}$$

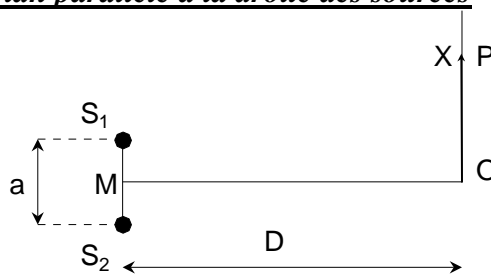
conduisant à :

$$r_2 - r_1 = a \left(1 - \frac{\rho^2}{2D^2} \right) \text{ et } I = 2I_0 \left\{ 1 + \cos \left[ka \left(1 - \frac{\rho^2}{2D^2} \right) + \Phi_2 - \Phi_1 \right] \right\}$$

Il est aussi intéressant de regarder la variation de l'éclairement en O lorsque la distance a varie :



b – Observation dans un plan parallèle à la droite des sources



Soit X et Y les coordonnées dans le plan parallèle à la droite des sources, l'évaluation de r_1 et r_2 pour Y=0 conduit à :

$$r_1 = \left[D^2 + \left(X - \frac{a}{2} \right)^2 \right]^{1/2} \approx D \left(1 + \frac{X^2 + \frac{a^2}{4} - aX}{2D^2} \right) \text{ et}$$

$$r_2 = \left[D^2 + \left(X + \frac{a}{2} \right)^2 \right]^{1/2} \approx D \left(1 + \frac{X^2 + \frac{a^2}{4} + aX}{2D^2} \right)$$

On a donc :

$$r_2 - r_1 \approx \frac{aX}{D} \text{ d'où}$$

$$I = 2I_0 \left\{ 1 + \cos \left[k \frac{aX}{D} + \Phi_2 - \Phi_1 \right] \right\} = 4I_0 \cos^2 \left(\frac{\pi aX}{\lambda D} + \Delta\Phi \right) = 4I_0 \cos^2 \left(\frac{\pi X}{i} + \Delta\Phi \right) \text{ avec}$$

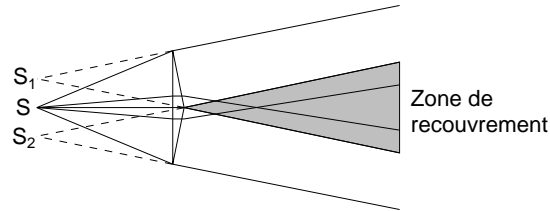
$$i = \lambda D / a.$$

On observe alors un ensemble de lignes parallèles.

II – Système interférentiel à division du front d'onde

Voici quelques systèmes interférentiels à division du front d'onde. La liste n'est pas exhaustive.

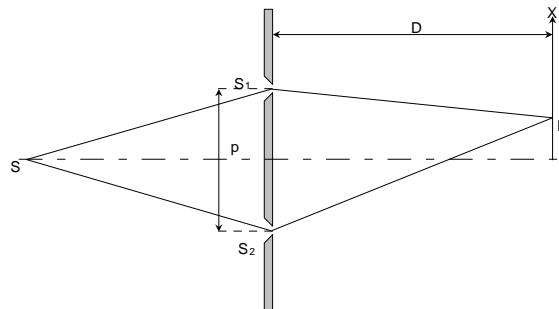
1 – Biprisme de Fresnel



On observe des franges d'interférences. La distance de la source au biprisme vaut l . La distance de la source au plan d'observation D . L'angle de déviation vaut $(n-1)A$ avec A angle du prisme. La distance inter-sources $a=2l(n-1)A$. Pour le verre, $n=1,5$ d'où $a=lA$.

L'éclairement s'écrit : $I = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\pi AX}{\lambda D}\right) = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\pi X}{i}\right)$ avec $i=\lambda D/(lA)$

2 – Fentes d'Young



On observe des franges d'interférences. Le calcul a été vu avec le principe de Huygens Fresnel. Nous avons obtenu : $I = |2aA|^2 \left(\frac{\sin(\pi ua)}{\pi ua}\right)^2 \cos^2(\pi up)$. L'interfrange d'interférence vaut alors :

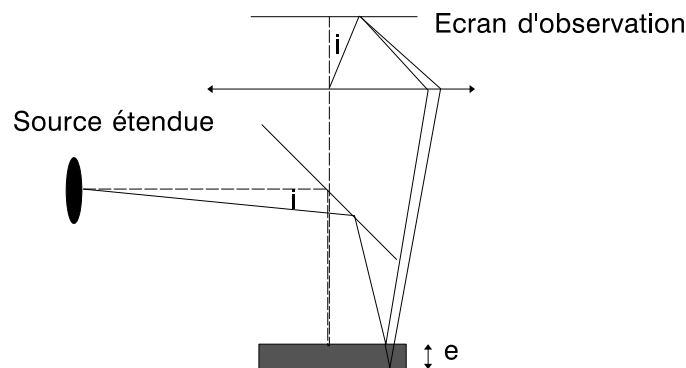
$i_i = \lambda D/p$, ce qui est bien sûr conforme au résultat de ce chapitre.

III – Système interférentiel à division d'amplitude

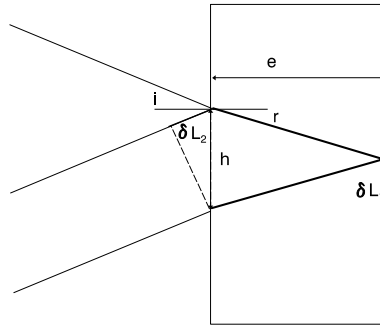
Il convient de faire la différence entre une source ponctuelle et une source étendue. Avec une source étendue, les anneaux se brouillent sauf à très grande distance, ce qui conduit à utiliser une lentille pour ramener la figure dans le plan focal de la lentille.

Il existe 2 systèmes différents d'intérêt permettant d'obtenir des anneaux : des anneaux d'Haidinger par réflexion sur une lame de diélectrique avec une source étendue et des anneaux avec un interféromètre de Michelson.

1- Anneaux d'Haidinger : source étendue



Comme on utilise une source étendue, on utilise une lentille pour observer le système d'anneaux et par conséquent, on s'intéresse à des rayons parallèles.



$$\delta L = \delta L_1 - \delta L_2 = 2n \frac{e}{\cos(r)} - \sin(i)h = 2n \frac{e}{\cos(r)} - \sin(i)[2e \tan(r)] = 2ne \cos(r)$$

Il faut tenir compte d'un déphasage supplémentaire (réflexion d'indice fort/faible), conduisant à : $\phi = \frac{2\pi}{\lambda} 2ne \cos(r) + \pi$ et par conséquent à un système d'anneaux.

L'ordre d'interférence est par définition : $p = \frac{\delta L}{\lambda}$

Au centre (r=0), on a : $p_0 = \frac{2ne}{\lambda_0} + \frac{1}{2} = m + \varepsilon$ où ε a donc été introduit pour tenir compte de l'ordre d'interférence au centre.

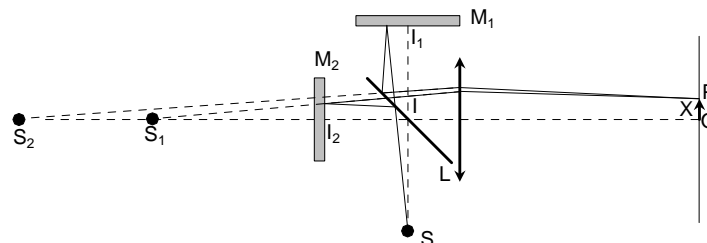
Pour le q^{ième} anneau (on mesure les maxima d'éclairement donc les zones claires, on passe de m+ ε qui correspond au centre à m qui correspond au premier anneau puis m-1 correspondant au second anneau), $\cos(r)$ décroît (-q), d'où : $p = \frac{2ne}{\lambda_0} \cos(r) + \frac{1}{2} = m - q + 1$

En effectuant un développement aux petits angles, $i=nr$, et le rayon R_q du q^{ième} anneau brillant, après élimination de m, dans le plan focal de la lentille vaut :

$$R_q = fi = fnr = f \left(\frac{n\lambda_0}{e} \right)^{1/2} (q - 1 + \varepsilon)^{1/2}.$$

2 - Interféromètre de Michelson : source ponctuelle

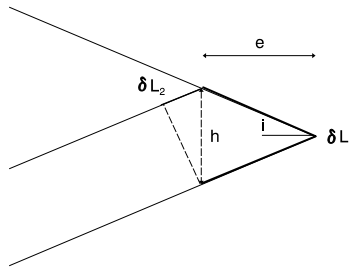
L'interféromètre de Michelson est un système d'une très grande importance pratique. Augmenter l'écart entre la séparatrice et les miroirs est équivalent à écarter les sources fictives S_1 et S_2 . On observe sur le plan OP des anneaux d'interférence.



La source S sera idéalement un laser pour observer le système d'anneau. La mise en place d'une lentille en sortie conduit à exprimer l'angle i qui était en fonction de X/SO en fonction de X/f .

3 - Interféromètre de Michelson : source étendue

Détermination de la différence de chemin optique entre 2 rayons



$$\delta L = \delta L_1 - \delta L_2 = 2 \frac{e}{\cos(i)} - \sin(i)h = 2 \frac{e}{\cos(i)} - \sin(i)[2e \tan(i)] = \frac{2e}{\cos(i)} (1 - \sin^2(i)) = 2e \cos(i)$$

Comme précédemment, $i_q = \left(\frac{\lambda}{e}\right)^{1/2} (q - 1 + \varepsilon)^{1/2}$

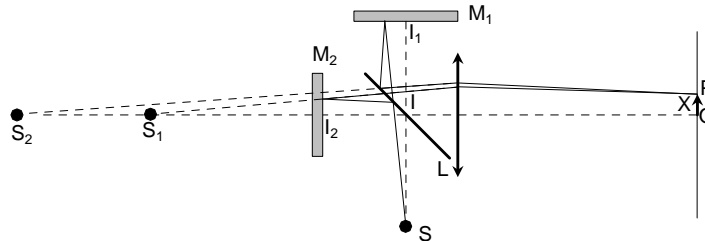
Si au centre $\varepsilon=0$, en allant du centre au $q^{\text{ième}}$ anneau, on a une variation de chemin optique de $2ei^2/2$ qui vaut $(q-1)\lambda$, CQFD

Mesure expérimentale

La différence de chemin optique $\Delta L=2e\cos(i)$. En différenciant cette expression, on obtient un déphasage qui conduit à une différence de chemin optique de λ entre 2 rayons consécutifs : $\lambda=2 e \sin(i) di= 2 e (<R>/D)(i_i/D)$ d'où la possibilité de déterminer l'écart e entre les miroirs : $e=\lambda D^2/(2<R>i_i)$. L'ajout d'une lentille en sortie conduit à remplacer D par f'.

Exercice - Interféromètre de Michelson (facultatif)

1 – En quelle année a t'il reçu le prix Nobel ? Pour quelle expérience ? Quel type d'interféromètre a servi ?



2 – A quoi sert la lentille et à quelle distance est-elle positionnée de l'écran ? Introduit-elle un déphasage ? Si oui, de quelle valeur ?

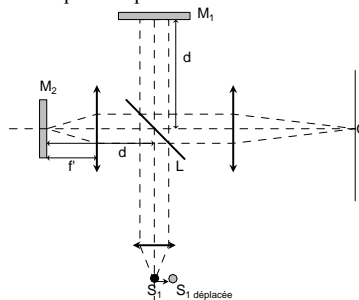
3 – En suivant un rayon incliné d'un angle i par rapport à S1, et en notant e la distance I2-I1, déterminer la différence de chemin optique entre un rayon transmis par la lame (L) séparatrice et réfléchi par la séparatrice en fonction de e et i. Faire un dessin soigné.

4 – Que vaut le coefficient de réflexion en amplitude d'une onde électromagnétique sur un diélectrique et sur un métal ? Pour un métal, quelle composante du champ est nulle ? Que vaut la différence $\vec{E}_r - \vec{E}_t$? Vérifier si un déphasage supplémentaire ne doit pas être ajouté.

5 – L'angle i étant faible, faire un développement limité et retrouver le résultat du cours. Ecrire l'éclairement détecté au point P.

6 – Sachant que l'écran a un diamètre de 10 cm, $\lambda=0,488\text{nm}$, $e=30\mu\text{m}$, $f=50\text{cm}$, déterminer le nombre d'anneaux visibles. Comment peut-on procéder pour observer 3 anneaux ?

7 – Prolongeons la question 4. On considère maintenant le dispositif ci-dessous qui permet d'observer l'existence d'exoplanètes. Que vaut le déphasage entre les deux sources virtuelles ? Qu'observe-t-on sur l'écran ? L'épaisseur de la lentille a un rôle qui est annulé en modifiant légèrement la position de M2. Nous n'en tiendrons donc pas compte.



Que se passe-t-il si S1 est légèrement déplacée ?

Cohérence

L'expérience courante montre que deux sources lumineuses ne produisent pas de phénomène d'interférence observable. Il apparaît donc nécessaire de revenir sur le principe d'émission de lumière et sur les différents types de sources.

I – Sources lumineuses

1 – Sources thermiques

Leur fonctionnement est basé sur l'émission lumineuse d'un corps chauffé à haute température (incandescence). Les matériaux employés (tungstène, carbone) émettent un rayonnement voisin de celui du corps noir. Le spectre est continu et couvre l'ensemble du domaine visible, si bien que l'œil a l'impression d'une lumière blanche. Ce spectre s'étend bien au delà du visible, notamment dans l'infrarouge, ce qui confère à ces sources une faible efficacité lumineuse. Ces lampes sont des lampes à incandescence ordinaire (2800K), ou quartz-iode (3200K). L'éclairement émis est modulée (10 et 5%) par le secteur à une fréquence de 100 Hz.

2 – Arc électrique

La lumière émise provient du plasma présent entre 2 électrodes. Le plasma peut reproduire un rayonnement proche de celui du soleil (5000K). Les électrodes se consomment au cours du temps, ce qui nécessite un changement relativement fréquent.

3 – Lampes spectrales

Ces lampes émettent un spectre de raies caractéristiques des atomes qu'elles contiennent. Il existe des lampes basses pression (faible émission mais raies fines à 10^{-2} nm) et haute pression (forte émission mais raies larges à 10^{-1} nm). En régime stationnaire, la lampe est chaude et l'élément sous forme de vapeur (sodium, mercure). L'émission thermoélectronique des électrodes provoque un flux d'électrons, qui entrent en collision avec les atomes de la vapeur. Ces collisions provoquent des transitions vers des états excités. Leur désexcitation induit l'émission de lumière.

4 – Tubes fluorescent

Les tubes contiennent du mercure à très basse pression. L'émission est la même que celle d'une lampe spectrale. La paroi du tube est recouverte d'une poudre fluorescente choisie de telle sorte que la lumière paraisse la plus blanche possible.

5 – Lasers (Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation)

Les lasers sont couramment utilisés dans les expériences d'optique, aussi bien en enseignement qu'au laboratoire. Le principal intérêt provient de la faible section du faisceau, de sa faible divergence et de sa forte monochromaticité (dans le cas d'un laser Hélium Néon de TP de longueur d'onde $0.6328 \mu\text{m}$, le rapport $\Delta\nu/\nu$ vaut $3 \cdot 10^{-6}$). La lumière laser permet ainsi de produire une bonne approximation de la droite géométrique puisque le faisceau a une très faible divergence (10^{-3} , 10^{-4}). Si le laser émet sur son premier mode TE_{00} , le mode est décrit en très bonne approximation par un faisceau gaussien. Le faisceau gaussien est caractérisé par un waist w_0 , rayon de la section droite minimale du faisceau. La dimension du faisceau suit la loi approchée suivante :

$$w = w_0 \left(1 + \frac{z^2}{z_r^2} \right)^{1/2} \quad \text{avec} \quad z_r = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$$

où z_r est la distance de Rayleigh. L'optique des faisceaux gaussiens diffère de celle des ondes planes. Le waist du faisceau entrant n'est pas conjugué au sens de l'optique géométrique du faisceau sortant sauf pour les systèmes afocaux. Il est possible de traiter les faisceaux gaussiens comme des faisceaux sphériques. Pour plus de détail, le lecteur pourra se reporter aux ouvrages spécialisés.

Notons qu'un faisceau laser focalisé par une lentille donne une tâche de rayon $f\theta$ où θ est la divergence du faisceau gaussien. Typiquement, avec une divergence de 1 mrad et une distance focale de 1 mm (microscope), on obtient une tâche de rayon $1 \mu\text{m}$.

6 – Diodes électroluminescentes

Les diodes électroluminescentes (LED en anglais) sont des sources de lumière assez monochromatiques, dont l'éclairement lumineux répond très rapidement au variation de courant. Elles sont constituées d'une jonction p-n de semi-conducteur.

II- Cohérence temporelle

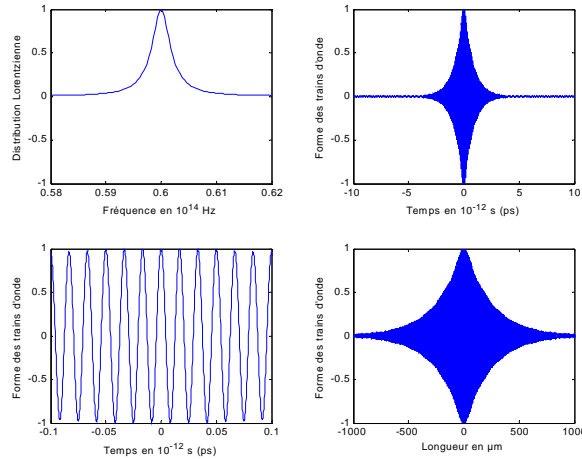
La cohérence temporelle est une caractéristique de la source. Une source réelle n'est jamais parfaitement monochromatique. La source émet un train d'onde de durée finie $\Delta\tau$. A un train d'onde fini correspond une largeur spectrale fine $\Delta\nu$. Ces deux grandeurs sont liées par la relation $\Delta\tau \cdot \Delta\nu \approx 1$. Deux ondes monochromatiques de fréquences très légèrement différentes ne peuvent interférer de façon cohérente à l'échelle des temps de réponse caractéristique des détecteurs optiques (photomultiplicateur : 10^{-9} s). Des expériences d'interférence entre deux sources distinctes sont possibles en laboratoire en partant de deux sources laser.

Considérons une source dont la distribution spectrale dont la largeur à mi-hauteur vaut $0,004 \cdot 10^{14}$ Hz. La reconstitution du signal en fonction du temps est montrée sur la figure suivante. A mi-hauteur, nous avons un temps τ_c de $1,2 \cdot 10^{-12}$ s. Nous avons simplement sommé toutes les composantes. Cette somme tend vers zéro pour un temps $t \gg \tau_c$. A ce temps est associé une distance $L_c = c/\tau_c$. L_c est la longueur de cohérence.

Il existe principalement deux formes de distributions spectrales :

- lorentzienne, principalement attribuée aux collisions entre atomes
- gaussienne, liée à l'effet Doppler

En fonction des formes retenues, le critère change légèrement. Pour simplifier, on modélise ces distributions par une fonction rectangle, de largeur $\Delta\nu$. On compare alors la variation de la phase $2\pi\Delta\nu t$ avec 2π . On définit alors le temps caractéristique τ_c par $1/\Delta\nu$.



A partir de cette longueur de cohérence temporelle, il est facile d'imager le concept de train d'onde. Considérons une source unique S qui émet sur une raie de durée finie. A partir de cette source unique, on génère deux sources S₁ et S₂. Le contraste des franges d'interférences tend progressivement vers zéro lorsque la différence de marche entre les trains d'onde augmente. Cette décroissance du contraste met en jeu la longueur caractéristique L_c=c/Δν

La longueur de cohérence va de 0,1 μm pour le soleil, à 1 μm pour un écran OLED, jusqu'au cm pour les raies d'une lampe à vapeur de mercure, à quelques cm pour une diode laser, au m pour un laser HeNe et finalement à quelques centaines de mètre pour les lasers de métrologie.

En P₁, la différence de marche est inférieure à L_c, les trains d'onde provenant de S₁ et S₂ interfèrent en P₁. En revanche, en P₂, la différence de marche est supérieure à L_c, les deux trains d'onde qui interfèrent proviennent de deux trains d'onde distincts issus de S, la différence de phase est aléatoire, il n'y a pas interférence.

Remarque : dans le cas de sources constituées de doublet, après une première extinction du contraste lié à une anti-coïncidence, un nouveau lieu de coïncidence apparaît : la longueur de cohérence associée à chacune des raies est bien plus grande que la longueur de cohérence associée au doublet. Ceci peut-être analysé à l'aide de l'interféromètre de Michelson.

III - Cohérence spatiale

La cohérence spatiale est l'influence de l'extension d'une source lumineuse sur le contraste des franges d'interférence qu'elle peut donner. Pour simplifier la discussion, nous supposons que les conditions de cohérences temporelles sont remplies. Il convient de faire la distinction entre sources primaires étudiées précédemment des sources secondaires que constitue un diaphragme ou une fente éclairé à l'aide d'un dispositif approprié. Hormis le laser, les lampes usuelles sont des assemblées de sources élémentaires qui émettent de façon indépendante les unes des autres. Leurs éclairages s'ajoutent sans interférer. Nous avons des sources incohérentes entre elles. Il se pose alors la question suivante : **comment peut-on avoir une source cohérente ?** Il faut étudier par exemple l'influence du déplacement de la source primaire incohérente dans un système interférentiel du type trous d'Young.

Un déplacement de ΔS de la source primaire S induit un déphasage au niveau de P. Si l'on prend le rayon 1 comme référence, le déphasage supplémentaire vaut :

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta\vec{S} \cdot (\vec{u}_1 - \vec{u}_2)$$

Si ce déplacement est perpendiculaire à S₁S₂, il n'y a pas d'effet, ce qui justifie l'utilisation de fente source dans certains montages pour augmenter la luminosité.

Si ce déplacement est suivant S₁S₂, en effectuant un développement, la variation angulaire ΔΦ = $\frac{2\pi}{\lambda} \Delta S \theta$ doit être très inférieure à 2π pour qu'aucun effet soit présent. En effet, $I = \sum 2I_i (1 + \cos \Phi_i)$. Les franges d'interférence ne sont pas brouillées si :

$$\frac{2\pi}{\lambda} \Delta S \theta < 2\pi \text{ ou encore } \theta < \frac{\lambda}{\Delta S} = \theta_c$$

L'angle θ_c est appelé largeur angulaire de cohérence spatiale ou angle de cohérence spatiale de la source incohérente S. Ce critère est qualitatif ne permet pas de traiter les cas de cohérence partielle que nous allons maintenant détailler.

Du point de vue physique, alors que dans le plan de la source primaire, les rayonnements des différents points sont indépendants, dans le plan des sources S₁ et S₂, les rayonnements de ces points sont reliés, au moins partiellement, au flux provenant d'un même point de la source primaire.

IV - Cohérence partielle

I - Degré de cohérence temporelle

Considérons l'interféromètre précédent éclairé par une source primaire S ponctuelle et quasi monochromatique. L'éclairement au niveau du détecteur sera :

$$I = \int 2I_v (1 + \cos(\Phi_v)) dv$$

En posant $I_0 = \int I_v dv$, $v' = v - v_0$ et $I_{v'} = \frac{I_v(v)}{I_0}$ (éclairement centrée normalisée), on peut exprimer cette quantité de manière symétrique

(centrée sur v₀) :

$$I = 2I_0 \left[1 + \int I_{\nu'} \cos(\Phi_{\nu'}) \right] = 2I_0 \left[1 + \operatorname{Re} \left\{ \exp(-i\Phi_{\nu_0}) \int I_{\nu'}^n \exp(i\Phi_{\nu'}) d\nu' \right\} \right]$$

Le dernier terme $\int I_{\nu'}^n \exp(i\Phi_{\nu'}) d\nu'$ est appelé le degré de cohérence temporelle γ_t . En l'exprimant selon son module, nous obtenons $\gamma_t = |\gamma_t| \exp(i\alpha_t)$ et :

$$I = 2I_0 \left[1 + |\gamma_t| \cos(2\pi\nu_0 \tau - \alpha_t) \right]$$

τ représente le temps L/c relié à la différence de chemin optique L . Comme la fonction cosinus varie plus rapidement que $|\gamma_t|$, l'éclairement varie entre $2I_0 [1 + |\gamma_t|]$ et $2I_0 [1 - |\gamma_t|]$, conduisant à un facteur de visibilité de :

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = |\gamma_t|$$

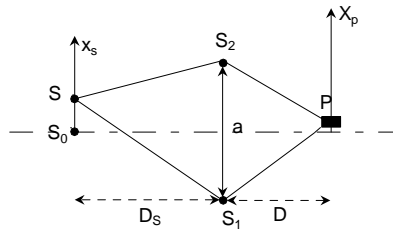
La relation entre V et la fonction $I_{\nu'}^n$ est connue sous le nom de théorème de Wiener et Kintchine.

Exemple :

Dans le cas d'un doublet (lampe), le facteur de visibilité vaut :

$$V = |\gamma_t| = \left| \int I_{\nu'}^n \exp(-i2\pi\nu' \tau) d\nu' \right| = \left| \frac{1}{2} \exp(-i2\pi \left(-\frac{\Delta\nu}{2}\right) \tau) + \frac{1}{2} \exp(i2\pi \left(-\frac{\Delta\nu}{2}\right) \tau) \right| = \left| \cos \left(\pi \frac{\tau}{\tau_c} \right) \right|$$

2 -Degré de cohérence spatiale



Reprenons le cas des trous d'Young, avec une source étendue monochromatique. L'éclairement détecté s'écrit :

$$I = \int 2I_s(x_s) (1 + \cos(\Phi)) dx_s \text{ avec } \Phi = \Phi_s + \Phi_p = \frac{2\pi}{\lambda} \left[\frac{ax_s}{D_s} + \frac{aX_p}{D} \right]$$

De la même façon que précédemment (centrage noté en prime et normalisation), on obtient :

$$I = 2I_0 \left[1 + |\gamma_s| \cos(\Phi_{s,0} + \Phi_p - \alpha_t) \right] \text{ avec } \gamma_s = \int I_{s,c}^n(x'_s) \exp(-i2\pi u x'_s) dx'_s \text{ et } u = \frac{a}{\lambda D_s} \text{ d'où } V = |\gamma_s|$$

La relation entre le facteur de visibilité V et l'éclairement spatial normalisé est connue sous le nom de théorème de Van Cittert et Zernike.

Exemple :

Considérons un système constitué d'une étoile double, les deux étoiles étant distantes de e . Le facteur de visibilité est alors :

$$V = |\gamma_s| = \left| \frac{1}{2} \exp\left(-2\pi \frac{a}{\lambda D_s} \frac{e}{2}\right) + \frac{1}{2} \exp\left(2\pi \frac{a}{\lambda D_s} \frac{e}{2}\right) \right| = \left| \cos\left(\frac{\pi a e}{\lambda D_s}\right) \right|$$

En faisant varier a , il est alors possible de déterminer e/D_s .